

الموضوع

التمرين الأول (3 ن)

نعتبر، في الفضاء المنسوب إلى معلم متعدد منظم مباشر $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، النقط $A(1, 1, -1)$ و $B(0, 1, -2)$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 1 = 0$$

(1) بين أن مركز الفلقة (S) هو النقطة $\Omega(1, 0, 1)$ وأن شعاعها هو $\sqrt{3}$

(2) أ- بين أن $\overline{AB} \wedge \overline{AC} = \vec{i} - \vec{k}$ وتحقق من أن $x - z - 2 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

ب- تحقق من أن $d(\Omega, (ABC)) = \sqrt{2}$ ثم بين أن المستوى (ABC) يقطع الفلقة (S) وفق دائرة (Γ) شعاعها 1

(3) ليكن (Δ) المستقيم المار من النقطة Ω والعمودي على المستوى (ABC)

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 0 \\ z = 1-t \end{cases} \quad (t \in IR)$$

أ- بين أن تمثيل باراميטרי للمستقيم (Δ)

ب- بين أن مثلاًث إحداثيات H نقطة تقاطع المستقيم (Δ) والمستوى (ABC) هو $(2, 0, 0)$

ج- استنتج مركز الدائرة (Γ)

التمرين الثاني (3 ن)

(1) حل في مجموعة الأعداد العقدية C المعادلة: $z^2 - 12z + 61 = 0$

(2) نعتبر، في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعدد منظم مباشر $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ، النقط A و B و C التي الحالها على التوالي هي a و b و c بحيث: $a = 6 - 5i$ و $b = 4 - 2i$ و $c = 2 + i$

أ- احسب $\frac{a-c}{b-c}$ واستنتج أن النقط A و B و C مستقيمة.

ب- نعتبر الإزاحة T ذات المتجهة \vec{u} حيث لحق \vec{u} هو $1+5i$

تحقق من أن لحق النقطة D صورة النقطة C بالإزاحة T هو $d = 3+6i$

ج- بين أن: $\frac{d-c}{b-c} = -1+i$ و أن $\frac{3\pi}{4}$ عددة للعدد العقدي i

د- استنتاج قياساً للزاوية الموجهة $\widehat{(CB, CD)}$

التمرين الثالث (3 ن)

يحتوي كيس على ثمانى بيدقات: بيدقة واحدة تحمل العدد 0 وخمس بيدقات تحمل العدد 1 وبيدقتان تحملان العدد 2 (لا يمكن التمييز بين البيدقفات باللمس).

نسحب عشوائياً وفي آن واحد ثلاثة بيدقات من الكيس.

(1) ليكن A الحدث: " الحصول على ثلاثة بيدقات تحمل أعداداً مختلفة متشاًمشي".

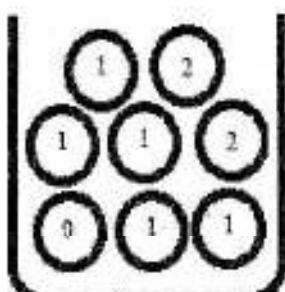
$$P(A) = \frac{5}{28}$$

(2) ليكن B الحدث: "مجموع الأعداد التي تحملها البيدقفات المسحوبة يساوي 5"

$$P(B) = \frac{5}{56}$$

(3) ليكن C الحدث: "مجموع الأعداد التي تحملها البيدقفات المسحوبة يساوي 4"

$$P(C) = \frac{3}{3}$$



التمرين الرابع (3 ن)

نعتبر المتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0 = 11$ و $u_{n+1} = \frac{10}{11}u_n + \frac{12}{11}$ لكل n من \mathbb{N}

$$(1) \text{ تحقق من أن : } u_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(u_n - 12) \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N} \quad 0.25$$

أ- بين بالترجع أن : $u_n < 12$ لكل n من \mathbb{N} 0.5

ب- بين أن المتالية (u_n) تزايدية قطعا . 0.5

ج- استنتج أن المتالية (u_n) متقاربة . 0.25

(3) لتكن (v_n) المتالية العددية بحيث : $v_n = u_n - 12$ لكل n من \mathbb{N}

أ- باستعمال السؤال (1) بين أن المتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{10}{11}$ ثم اكتب v_n بدلة n 0.75

$$\text{ب- بين أن : } v_n = 12 - \left(\frac{10}{11} \right)^n \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N} \text{ ثم احسب نهاية المتالية } (u_n) \quad 0.75$$

التمرين الخامس (8 ن)

(1) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $[0, +\infty]$ بما يلي :

أ- بين أن $-x^2$ و $2x^2 \ln x$ لهما نفس الإشارة على المجال $[0, 1]$ 0.75

ث- استنتج أن $g(x) \leq 0$ لكل x من المجال $[0, 1]$ 0.1

(2) بين أن $-x^2$ و $2x^2 \ln x$ لهما نفس الإشارة على المجال $[1, +\infty]$ 0.75

ث- استنتج أن $g(x) \geq 0$ لكل x من المجال $[1, +\infty]$ 0.1

(ا) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0, +\infty]$ بما يلي :

ولتكن (C) المنحني الممثل للدالة f في معلم متواحد منظم (O, \vec{i}, \vec{j}) (الوحدة 3cm) 0.5

أ- بين أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ وأول هذه النتيجة هندسيا .

ب- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ على الشكل $\left(\frac{x^2 - 1}{x} \right) \ln x$ يمكن كتابة $\frac{f(x)}{x}$ على الشكل 1

واستنتاج أن المنحني (C) يقبل فرعا شلجميا بجوار $+\infty$ يتم تحديد اتجاهه .

(2) أ- بين أن $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ لكل x من $[0, +\infty]$ وأول هندسيا النتيجة $f'(1) = 0$ 1.25

ب- استنتاج أن الدالة f تناظرية على المجال $[0, 1]$ و تزايدية على المجال $[1, +\infty]$ 0.5

ج- أعط جدول تغيرات الدالة f على المجال $[0, +\infty]$ ثم بين أن $f(x) \geq 0$ لكل x من $[0, +\infty]$ 0.5

(3) اثنى المنحني (C) في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) 1

أ- بين أن $u: x \mapsto \frac{x^3}{3} - x$ دالة أصلية للدالة f على \mathbb{R} 0.5

ب- باستعمال متكاملة بالأجزاء بين أن : $\int_1^2 (x^2 - 1) \ln x \, dx = \frac{2}{9}(1 + 3 \ln 2)$ 1

ج- احسب ب cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحني (C) ومحور الأفقيين والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = 2$ 0.25



التمرين الأول: (3 ن)

(1) لنبين أن مركز الفلكة (S) هي النقطة $(1,0,1)$ و أن شعاعها $r = \sqrt{3}$ لدينا $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 1 = 0$ معادلة ديكارتية للفلكة (S) $(S): (x-1)^2 - 1 + (y-0)^2 + (z-1)^2 - 1 - 1 = 0$ إذن $(S): x^2 - 2x + y^2 + z^2 - 2z - 1 = 0$ ومنه $(S): (x-1)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = (\sqrt{3})^2$ إذن $(S): (x-1)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = 3$ أيالمعادلة المختصرة للفلكة (S) و بالتالي مركز الفلكة (S) هي النقطة $(1,0,1)$ و شعاعها يساوي $\sqrt{3}$ (2) $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{i} - \vec{k}$ لنبين أنلدينا: $C(3,2,1)$; $B(0,1,-2)$; $A(1,1,-1)$ لدينا: $\vec{AB}(-1,0,-1)$ و منه: $\vec{AB}(0-1,1-1,-2+1)$ إذن: $\vec{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$ لدينا: $\vec{AC}(2,1,2)$ و منه: $\vec{AC}(3-1,2-1,1+1)$ إذن: $\vec{AC}(x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A)$ و

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

أي: $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{k}$ و بالتالي: $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{i} - \vec{k}$ (3) لنستنتج أن $x - z - 2 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)طريقة 1: لدينا $\vec{AB} \wedge \vec{AC}(1,0,-1)$ متجهة منظمية على المستوى (ABC)إذن: $1x + 0y - 1z + d = 0$ معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)و بما أن $A \in (ABC)$ فإن مثُولُ إحداثياتها يحقق المعادلة الديكارتية للمستوى (ABC).

$$d = -2 \quad \text{أي} \quad 2 + d = 0 \quad \text{إذن} \quad A(1,1,-1) \in (ABC) \Leftrightarrow 1 - (-1) + d = 0$$

و بالتالي $x - z - 2 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC).طريقة 2: لدينا $\vec{n} = \vec{AB} \wedge \vec{AC}(1,0,-1)$ متجهة منظمية على المستوى (ABC)

$$M(x, y, z) \in (ABC) : \vec{n} \cdot \vec{AM} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z+1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{إذن:}$$

$$M(x, y, z) \in (ABC) \Leftrightarrow 1(x-1) + 0(y-1) - 1(z+1) = 0 \Leftrightarrow x - 1 - z - 1 = 0$$

و بالتالي: $x - z - 2 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC).

بـ لنتتحقق من أن $d(\Omega, (ABC)) = \sqrt{2}$ ثم لنبين أن المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ) شعاعها $r=1$:

لدينا $x-z-2=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) و $\Omega(1,0,1)$

$$d(\Omega, (ABC)) = \frac{|1 \times 1 + 0 - 1 \times 1 - 2|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{|1 + 0 - 1 - 2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \quad \text{إذن}$$

$$d(\Omega, (ABC)) = \frac{|ax_\Omega + by_\Omega + cz_\Omega + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

إذن $d(\Omega, (ABC)) = \sqrt{2}$ وبما أن $r = \sqrt{3}$ فإن المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ) شعاعها $1 = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2}$

0,25+ 0,25+ 0,5 . $R = \sqrt{d^2 - r^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = 1$

أـ لنبين أن $\left\{ \begin{array}{l} x = 1+t \\ y = 0 \\ z = 1-t \end{array} ; (t \in \mathbb{R}) \right.$ تمثيل بارامטרי للمستقيم (Δ) المار من Ω والعمودي على المستوى (ABC) :

بـ أن المستقيم (Δ) عمودي على المستوى (ABC) فإن $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{i} - \vec{k}$ المتجهة المنظمية على (ABC) هي متجهة موجهة للمستقيم (Δ) و $\Omega \in (\Delta)$

$$\left\{ \begin{array}{l} x-1=t \\ y-0=0 \\ z-1=-t \end{array} ; M \in (\Delta) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \overrightarrow{\Omega M} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \\ z-1 \end{pmatrix} = t \vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right.$$

إذن $M(x,y,z) \in (\Delta)$ تكافئ أن

0,25 . تمثيل بارامטרי للمستقيم (Δ) $\left\{ \begin{array}{l} x = 1+t \\ y = 0 \\ z = 1-t \end{array} ; (t \in \mathbb{R}) \right.$ إذن

بـ لنبين أن مثلث إحداثيات H نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و المستوى (ABC) هو $(2;0;0)$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 1+t \\ y = 0 \\ z = 1-t \end{array} ; (t \in \mathbb{R}) \right. \quad \text{ومنه} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 1+t \\ y = 0 \\ z = 1-t \end{array} ; (t \in \mathbb{R}) \right. \quad \text{انحل تحليليا النقطة:}$$

$$1+t-1+t-2=0 \quad x-z-2=0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 1+1=2 \\ y = 0 \\ z = 1-1=0 \end{array} ; (t \in \mathbb{R}) \right. \quad \text{إذن} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 1+t \\ y = 0 \\ z = 1-t \end{array} ; (t \in \mathbb{R}) \right. \quad \text{يعني} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 1+t \\ y = 0 \\ z = 1-t \end{array} ; (t \in \mathbb{R}) \right. \quad \text{يعني} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 1+t \\ y = 0 \\ z = 1-t \end{array} ; (t \in \mathbb{R}) \right. \quad \text{يعني}$$

$$t=1 \quad t=1 \quad 2t=2 \quad 2t-2=0$$

و بالتالي مثلث إحداثيات H نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و المستوى (ABC) هو $(2;0;0)$.

جـ لنسنن مركز دائرة (Γ) :

☆ نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و المستوى (ABC) هي المسقط العمودي للنقطة Ω مركز الفلكة (S)

و بما أن الفلكة (S) تقطع المستوى (ABC) وفق دائرة فإن $H(2;0;0)$ هي مركز الدائرة (Γ) .



التمرين الثاني: (3 ن)

(1) لنحل في \mathbb{C} مجموعة الأعداد العقدية المعادلة: $z^2 - 12z + 61 = 0$

0,25 $\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \times 1 \times 61 = 144 - 244 = -100$ و $a = 1$; $b = -12$; $c = 61$ لدينا:

بما أن $\Delta \neq 0$ فإن المعادلة تقبل حلين مترافقين

$$z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{12 - 10i}{2 \times 1} = \frac{2(6 - 5i)}{2} \quad \text{و} \quad z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{12 + 10i}{2 \times 1} = \frac{2(6 + 5i)}{2}$$

0,25 + 0,25 $S = \{6 + 5i, 6 - 5i\}$ إذن: $z_2 = 6 - 5i$ و $z_1 = 6 + 5i$ وبالتالي:

(2) أ- لنحسب $\frac{a-c}{b-c}$ و لنتستنتج أن النقط A و B و C مستقيمية: **0,25 + 0,25**

لدينا $\frac{a-c}{b-c} \in \mathbb{R}$ فإن النقط A و B و C مستقيمية.

ب- لنتتحقق من أن لحق النقطة D صورة النقطة C بالإزاحة T ذات المتجهة $\vec{u}(1+5i)$ هو

لدينا $T(C) = D \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = \vec{u} \Leftrightarrow d - c = 1 + 5i \Leftrightarrow d = 1 + 5i + c = 1 + 5i + 2 + i = 3 + 6i$

و وبالتالي لحق النقطة D صورة النقطة C بالإزاحة T ذات المتجهة $\vec{u}(1+5i)$ هو

ج- **0,5** لنبين أن: $\frac{d-c}{b-c} = -1+i$

$$\frac{d-c}{b-c} = \frac{3+6i-2-i}{4-2i-2-i} = \frac{1+5i}{2-3i} = \frac{(1+5i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{2+3i+10i-15}{2^2+3^2} = \frac{-13+13i}{13} = \frac{13(-1+i)}{13} \quad \text{طريقة 1:}$$

$$\frac{d-c}{b-c} = -1+i \quad \text{و منه}$$

$$\frac{d-c}{b-c} = \frac{3+6i-2-i}{4-2i-2-i} = \frac{1+5i}{2-3i} = \frac{(1+5i)(-1+i)}{(2-3i)(-1+i)} = \frac{(1+5i)(-1+i)}{-2+2i+3i+3} = \frac{(1+5i)(-1+i)}{1+5i} = -1+i \quad \text{طريقة 2:}$$

0,25 لنبين أن $\frac{3\pi}{4}$ عمدة للعدد العقدي i

$$\left| \frac{d-c}{b-c} \right| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2} \quad \text{و منه} \quad \frac{d-c}{b-c} = -1+i \quad \star$$

$$\sin(\arg(-1+i)) = \frac{\operatorname{Im}(-1+i)}{|-1+i|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{و} \quad \cos(\arg(-1+i)) = \frac{\operatorname{Re}(-1+i)}{|-1+i|} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

إذن $\arg(-1+i) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ عمدة للعدد العقدي i

د- لنتستخرج قياساً للزاوية الموجهة $\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CD}$

$$\left(\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CD} \right) = \frac{3\pi}{4}[2\pi] \quad \text{و وبالتالي} \quad \left(\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CD} \right) = \arg\left(\frac{d-c}{b-c}\right) = \arg(-1+i)$$



(التمرين الثالث: (3 ن)

2 2 1 1 1 1 1 0

سحب عشوائيا تانيا ثالث بيدقات من كيس يضم ثمان بيدقات

$$(1) \text{ لنبين أن } p(A) = \frac{5}{28}$$

A : " نحصل على ثلاثة بيدقات تحمل أرقاما مختلفة مثنى مثنى " :

$$0,5 + 0,5 \quad p(A) = \frac{5}{28} \quad p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{C_1^1 \times C_5^1 \times C_2^1}{C_8^3} = \frac{1 \times 5 \times 2}{56} = \frac{10}{56}$$

$$(2) \text{ لنبين أن } p(B) = \frac{5}{56}$$

B : " نحصل على ثلاثة بيدقات تحمل أرقاما مجموعها يساوي 5 " :

$$0,5 + 0,5 \quad p(B) = \frac{5}{56} \quad p(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{C_5^1 \times C_2^2}{C_8^3} = \frac{5 \times 1}{56}$$

$$(3) \text{ لنبين أن } p(C) = \frac{3}{8}$$

C : " نحصل على ثلاثة بيدقات تحمل أرقاما مجموعها يساوي 4 " أو {1;1;2} أو {0;2;2} :

$$0,5 + 0,5 \quad p(C) = \frac{3}{8} \quad p(C) = \frac{\text{card}(C)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{C_1^1 \times C_2^2 + C_5^2 \times C_2^1}{C_8^3} = \frac{1 + 10 \times 2}{56} = \frac{21}{56}$$

التمرين الرابع: (3 ن)

$$(1) \text{ لتحقق من أن: } u_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(u_n - 12) \quad \forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(u_n - 12) \text{ وبالتالي } u_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}u_n + \frac{12}{11} - 12 = \frac{10u_n + 12 - 132}{11} = \frac{10u_n - 120}{11} \text{ لدينا}$$

(2) أ- لنبين بالترجع أن: $u_n < 12$ لكل n من \mathbb{N}

☆ لتحقق من أن $u_0 < 12$: لدينا $u_0 = 11$ و $11 < 12$ إذن $u_0 < 12$

☆ نفترض أن $u_n < 12$ و نبين أن $u_{n+1} < 12$:

$$\text{لدينا حسب فرضية الترجع } u_n < 12 \text{ و منه } 0 < u_n - 12 < 0 \text{ إذن } 0 < \frac{10}{11}(u_n - 12) < 0 \text{ لدينا حسب فرضية الترجع}$$

أي $u_{n+1} < 12$ لكل n من \mathbb{N} من ① و ② نستنتج أن $u_n < 12$ لكل n من \mathbb{N} .

ب- لنبين أن المتالية (u_n) تزايدية قطعاً:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{10}{11}u_n + \frac{12}{11} - u_n = \frac{10u_n + 12 - 11u_n}{11} = \frac{1}{11}(12 - u_n) \text{ لدينا}$$

لدينا $\frac{1}{11}(12 - u_n) > 0$ إذن $12 - u_n > 0$ و منه $0 < 12 - u_n < 11$ إذن لكل n من \mathbb{N}

أي $u_{n+1} - u_n > 0$ لكل n من \mathbb{N} وبالتالي (u_n) تزايدية قطعاً.

ج- لنستنتج أن المتالية (u_n) متقاربة:

لدينا مما سبق أن المتالية (u_n) تزايدية قطعاً n ومكبورة بالعدد 12 إذن المتالية (u_n) متقاربة.

(3) أ- لنبين أن المتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{10}{11}$:

$$\text{لدينا } v_{n+1} = \frac{10}{11}v_n \text{ و } v_n = u_n - 12 \text{ وبالتالي المتالية } (v_n) \text{ هندسية أساسها } \frac{10}{11} \text{ لدينا}$$

لنكتب v_n بدلالة n :

$$v_n = v_0 \times q^n = -1 \times \left(\frac{10}{11}\right)^n \quad \text{و} \quad v_0 = u_0 - 12 = 11 - 12 = -1 \text{ لدينا}$$

ب- ☆ لنبين أن $u_n = 12 - \left(\frac{10}{11}\right)^n$ لكل n من \mathbb{N} :

$$\text{لدينا } v_n = -\left(\frac{10}{11}\right)^n \text{ و } u_n = v_n + 12 \text{ و } u_n = u_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}u_n \text{ إذن}$$

$$u_n = 12 - \left(\frac{10}{11}\right)^n \text{ . نحن نحسب نهاية المتالية } (u_n)$$

$$0,25 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 12 \quad \text{إذن} \quad 0,25 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{10}{11}\right)^n = 0 \quad \text{و} \quad u_n = 12 - \left(\frac{10}{11}\right)^n \text{ لدينا}$$



(التمرين الخامس: 8 ن)

1-I كـ لنبين أن: $-x^2 + 0,25 \geq 0$ لهما نفس الإشارة على المجال $[0;1]$:
 لدينا $x > 0$ و منه $0 < x^2 < 1$ إذن $-x^2 < -1 < 0$ و بالتالي إشارة $-x^2$ سالبة على المجال $[0;1]$.
 وإشارة $(x) \ln(2x^2)$ هي إشارة $(x) \ln(x)$ لأن لكل x من $[0;1] \setminus \{0\}$ و $0 < 2x^2 < 1$ على المجال $[0;1]$.
 و بالتالي إشارة $(x) \ln(2x^2)$ سالبة على المجال $[0;1]$.
 إذن $-x^2 + 0,25 \geq 0$ لهما نفس الإشارة على المجال $[0;1]$.

كـ لنتستنتج أن $0 \leq g(x) \leq 1$ و لكل x من $[0;1]$:
 من ① و ② نستنتج أن إشارة $(x) \ln(2x^2)$ سالبة على المجال $[0;1]$ أي g سالبة على المجال $[0;1]$.
 (لأن مجموع دالتين سالبيتين $-x^2 + 0,25$ هي دالة سالبة) و $g(1) = 0$
 إذن نستنتج أن $0 \leq g(x) \leq 1$ و لكل x من $[0;1]$.

2 كـ لنبين أن: $-x^2 + 0,25 \geq 0$ لهما نفس الإشارة على المجال $[-\infty; +\infty]$:
 لدينا $x > 1$ و منه $1 < x < +\infty$ إذن $-x^2 < -1 < 0$ و بالتالي إشارة $-x^2$ موجبة على المجال $[-\infty; +\infty]$.
 وإشارة $(x) \ln(2x^2)$ هي إشارة $(x) \ln(x)$ لأن لكل x من $[-\infty; +\infty] \setminus \{0\}$ و $0 < 2x^2 < +\infty$ على المجال $[-\infty; +\infty]$.
 و بالتالي إشارة $(x) \ln(2x^2)$ موجبة على المجال $[-\infty; +\infty]$.
 إذن $-x^2 + 0,25 \geq 0$ لهما نفس الإشارة على المجال $[-\infty; +\infty]$.

كـ لنتستنتج أن $0 \leq g(x) \leq 1$ و لكل x من $[-\infty; +\infty]$:
 من ③ و ④ نستنتج أن إشارة $(x) \ln(2x^2)$ موجبة على المجال $[-\infty; +\infty]$ أي g موجبة على المجال $[-\infty; +\infty]$.
 (لأن مجموع دالتين موجبتين $-x^2 + 0,25$ هي دالة موجبة) و $g(1) = 0$
 إذن نستنتج أن $0 \leq g(x) \leq 1$ و لكل x من $[-\infty; +\infty]$.

أ) لنبي أن $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ ولنؤول النتيجة مبيانيا:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty \text{ وبالتالي } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x^2 - 1) \ln(x) = (-1) \times (-\infty) \text{ إذن } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty \text{ و } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x^2 - 1) = -1 \text{ لدينا}$$

و منه نستنتج أن (C) منحنى الدالة f يقبل مقاربا عموديا معادلته $x = 0$.

ب- كـ لحسب $0,25 : \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 1) \ln(x) = (+\infty) \times (+\infty) = +\infty \text{ إذن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \text{ لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ وبالتالي}$$

ب- كـ لنبي أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ و لنستخرج أن المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا بجوار ∞

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x} \right) \ln(x) = +\infty \text{ إذن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ لدينا}$$

وبالتالي ∞ ومنه نستخرج أن المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار ∞ أ)

كـ لنبي أن $1 :]0; +\infty[$ لكل x من $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$

$$f(x) = (x^2 - 1) \ln(x) :]0; +\infty[\text{ لدينا لكل } x \text{ من}$$

$$f'(x) = (x^2 - 1)' \ln(x) + (x^2 - 1)(\ln(x))' = 2x \ln(x) + (x^2 - 1) \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{x^2 - 1 + 2x^2 \ln(x)}{x} \text{ ومنه}$$

$$\cdot]0; +\infty[f'(x) = \frac{g(x)}{x} \text{ وبالتالي } g(x) = x^2 - 1 + 2x^2 \ln(x) \text{ و}$$

كـ لنؤول هندسيا النتيجة $0,25 : f'(1) = 0$

لدينا $f'(1) = 0$ و منه يقبل المنحنى (C) مماساً أفقيا في النقطة $A(1, 0)$

ب- لنستخرج أن الدالة f تناقصية على المجال $[0, 1]$ و تزايدية على المجال $[1, +\infty[$

لدينا $0,25 : f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ لكل x من $]0; +\infty[$ إذن إشارة $(x)f'$ هي نفس إشارة $(x)g$ وكل x من $]0; +\infty[$

☆ إذا كان $x \in [0, 1]$ فإن $0 \leq (x)g \leq (x)f$ أي $0 \leq (x)f$ وبالتالي f تناقصية على المجال $[0, 1]$.

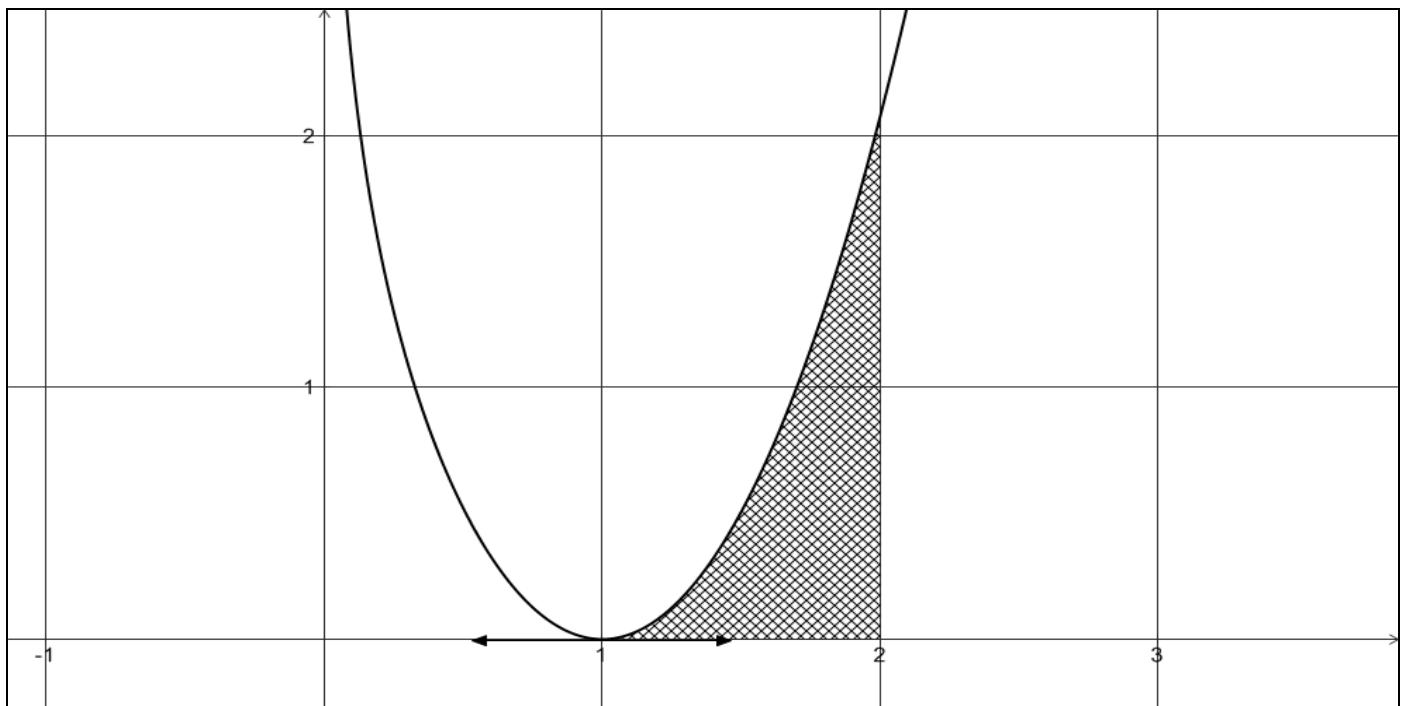
☆ إذا كان $x \in [1, +\infty[$ فإن $0 \geq (x)g \geq (x)f$ أي $0 \geq (x)f$ وبالتالي f تزايدية على المجال $[1, +\infty[$.

ج- كـ لنجز جدول تغيرات الدالة f :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

كـ لنبي أن $0 \leq (x)f$ لكل x من $]0; +\infty[$

لدينا 0 قيمة دنيا مطلقة للدالة f عند $x = 1$ إذن $0 \leq (x)f$ لكل x من $[0; +\infty[$



أ- لنئى أن $x \mapsto \frac{x^3}{3} - x^2 + 1$ دالة أصلية للدالة $x \mapsto x^3 - x^2 + 1$ على \mathbb{R} (4)

لدينا $x \mapsto x^3 - x^2 + 1$ دالة متصلة على \mathbb{R} لأنها دالة حدودية و

إذن $x \mapsto \frac{x^3}{3} - x^2 + 1$ دالة أصلية للدالة $x \mapsto x^3 - x^2 + 1$ على \mathbb{R} .

ب- لنئى باستعمال المتكاملة بالأجزاء أن:

$$\begin{cases} u(x) = \frac{x^3}{3} - x \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases} \text{ و منه } \begin{cases} u'(x) = x^2 - 1 \\ v(x) = \ln(x) \end{cases}$$

$$\int_1^2 (x^3 - x^2 + 1) \ln(x) dx = \left[\left(\frac{x^3}{3} - x \right) \ln(x) \right]_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \left(\frac{1}{x} \right) dx = \left[\left(\frac{x^3}{3} - x \right) \ln(x) \right]_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{1}{3}x^2 - 1 \right) dx$$

$$\int_1^2 (x^3 - x^2 + 1) \ln(x) dx = \left[\left(\frac{x^3}{3} - x \right) \ln(x) \right]_1^2 - \left[\frac{x^3}{9} - x \right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} - 2 \right) \ln(2) - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \ln(1) - \left(\frac{8}{9} - 2 - \frac{1}{9} + 1 \right)$$

$$\text{إذن } \int_1^2 (x^3 - x^2 + 1) \ln(x) dx = \frac{2}{9}(1 + 3\ln(2)) \text{ و وبالتالي } \int_1^2 (x^3 - x^2 + 1) dx = \frac{2\ln(2)}{3} - 0 + \frac{2}{9}$$

ج- لنحسب ب cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين

$$0,25 \quad 1u.a = 9 cm^2 : x=1 \text{ و } x=2$$

$$S = 2(1 + 3\ln(2)) cm^2 \text{ و وبالتالي } S = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (x^3 - x^2 + 1) dx = \frac{2}{9}(1 + 3\ln(2)) \times 9$$