الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2010
الموضوع

المــــــــادة:	الرياضيات	NS24	المعامل:	9
الشعـــب(ة) أو المسلك :	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)		مدة الإنجاز:	4

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع (4) ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالبنيات الجبرية....................(3.5ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالأعداد العقدية......................(3.5ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالحسابيات...........................(3ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل............................(6.25ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل.........................(3,75ن)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة القابلة للبرمجة

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

Moutamadris.ma

التمرين الأول :(3.5 نقط) الجزءان I و II مستقلان فيما بينهما.

I- نزود المجموعة $I =]0,+\infty[$ بقانون التركيب الداخلي $*$ المعرف بما يلي:

$$\left(\forall(a,b)\in I\times I\right)\quad a*b=e^{\ln(a)\cdot\ln(b)}$$

1) بين أن القانون $*$ تبادلي و تجميعي في I . 0.5

2) بين أن القانون $*$ يقبل عنصرا محايدا ε في I يتم تحديده. 0.25

3) أ- بين أن $(I\setminus\{1\},*)$ زمرة تبادلية. ($I\setminus\{1\}$ هي المجموعة I محرومة من 1) 0.75

ب- بين أن $]1,+\infty[$ زمرة جزئية للزمرة $(I\setminus\{1\},*)$. 0.25

4) نزود I بقانون التركيب الداخلي $\times$ ($\times$ هو الضرب في $\mathbb{R}$)

أ- بين أن القانون $*$ توزيعي بالنسبة للقانون $\times$ 0.25

ب- بين أن $(I,\times,*)$ جسم تبادلي. 0.5

II- نعتبر المصفوفة : $A=\begin{pmatrix}1&1&-2\\-1&-1&2\\-2&-2&0\end{pmatrix}$

1) أحسب A^2 و A^3 . 0.5

2) استنتج أن المصفوفة A لا تقبل مقلوبا . 0.5

التمرين الثاني :(3.5 نقط)

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) أ- حدد الجذرين المربعين للعدد العقدي : $3+4i$ 0.25

ب- حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E):4z^2-10iz-7-i=0$ 0.5

2) ليكن a و b حلي المعادلة (E) حيث: $\mathrm{Re}(a)<0$ والنقطتين A و B صورتي a و b على التوالي.

أ- تحقق أن: $\dfrac{b}{a}=1-i$ 0.25

ب- استنتج أن المثلث AOB متساوي الساقين و قائم الزاوية في A . 0.75

3) لتكن C نقطة لحقها c وتخالف النقطة A ولتكن D صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه C وزاويته $\dfrac{\pi}{2}$ ولتكن L صورة النقطة D بالإزاحة التي متجهتها $\overrightarrow{AO}$.

أ- حدد بدلالة c العدد العقدي d لحق النقطة D . 0.5

ب- حدد بدلالة c العدد العقدي ℓ لحق النقطة L . 0.5

ج- حدد الكتابة الجبرية للعدد العقدي $\dfrac{\ell-c}{a-c}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ACL . 0.75

Moutamadris.ma

التمرين الثالث:(3 نقط)

1) حدد الأعداد الصحيحة الطبيعية m بحيث: $m^2+1\equiv 0 \quad [5]$	1
2) ليكن p عددا أوليا بحيث : $p=3+4k$ مع k عدد صحيح طبيعي.	
و ليكن n عددا صحيحا طبيعيا بحيث: $n^2+1\equiv 0\,[p]$	
أ- تحقق أن: $\left(n^2\right)^{1+2k}\equiv -1\,[p]$	0.25
ب- بين أن n و p أوليان فيما بينهما.	0.5
ج- استنتج أن: $\left(n^2\right)^{1+2k}\equiv 1\,[p]$	0.75
د- استنتج مما سبق أنه لا يوجد عدد صحيح طبيعي n يحقق: $n^2+1\equiv 0\,[p]$	0.5

التمرين الرابع:(6.25 نقط)

I- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بما يلي: $f(x)=4xe^{-x^2}$	
و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.	
1) أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$	0.5
2) أدرس تغيرات الدالة f على المجال $[0;+\infty[$ ثم ضع جدول تغيراتها .	0.75
3) حدد معادلة نصف المماس للمنحنى (C) في أصل المعلم ثم أنشئ (C).	0.75
(نأخذ $\\|\vec{i}\\|=\\|\vec{j}\\|=2cm$ و نقبل أن النقطة التي أفصولها $\sqrt{\frac{3}{2}}$ نقطة انعطاف للمنحنى (C))	
4)أحسب التكامل $a=\int_0^1 f(x)dx$ ثم استنتج بالسنتمتر المربع مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى (C) ومحوري المعلم و المستقيم الذي معادلته $x=1$	0.5
II- ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر من أو يساوي 2 .	
نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بما يلي : $f_n(x)=4x^ne^{-x^2}$	
1) أ- بين أن: $e^{-x^2}<e^{-x} \quad (\forall x>1)$	0.25
ب- استنتج نهاية الدالة f_n عندما تؤول x إلى $+\infty$.	0.25
2) ادرس تغيرات الدالة f_n على المجال $[0;+\infty[$ ثم ضع جدول تغيراتها .	0.75
3) بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد u_n من المجال $]0,1[$ بحيث : $f_n(u_n)=1$	0.5
4) أ- تحقق أن : $f_{n+1}(u_n)=u_n \quad (\forall n\geq 2)$	0.25
ب- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 2}$ تزايدية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة .	0.75

Moutamadris.ma

5) نضع : $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$

0.25 أ- بين أن : $0<\ell\le 1$

0.25 ب- بين أن : $-\dfrac{\ln(4)}{n}<\ln(u_n)<\dfrac{1}{n}-\dfrac{\ln(4)}{n} \quad (\forall n\ge 2)$

0.5 ج- استنتج أن : $\ell=1$

<u>التمرين الخامس:</u>(3.75 نقط)

نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي : $F(x)=\displaystyle\int_x^{2x}\frac{1}{\ln(1+t^2)}dt$

0.25 1) بين أن الدالة F فردية .

2) لكل x من المجال $]0,+\infty[$ نضع : $\varphi(x)=\displaystyle\int_1^{x}\frac{1}{\ln(1+t^2)}dt$

0.25 أ- تحقق أن: $F(x)=\varphi(2x)-\varphi(x) \quad (\forall x>0)$

0.5 ب- بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ ثم أحسب $F'(x)$ من أجل $x>0$

0.5 ج- استنتج منحى تغيرات الدالة F على المجال $]0,+\infty[$.

0.5 3) أ- باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية ، بين أن: $(\forall x>0)\ (\exists c\in\,]x,2x[)\ :\ F(x)=\dfrac{x}{\ln(1+c^2)}$

0.25 ب- استنتج أن: $\dfrac{x}{\ln(1+4x^2)}<F(x)<\dfrac{x}{\ln(1+x^2)} \quad : \quad (\forall x>0)$

0.75 ج-حدد النهايات : $\lim_{x\to0^+}F(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}F(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}$.

0.75 د- تحقق أن : $F\left(\sqrt{e-1}\right)<\sqrt{e-1}$ و $F\left(\dfrac{\sqrt{e-1}}{2}\right)>\dfrac{\sqrt{e-1}}{2}$

ثم استنتج أن المعادلة $F(x)=x$ تقبل حلا وحيدا في $]0,+\infty[$.

Moutamadris.ma

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2010
عناصر الإجابة

المــــادة:	الرياضيات	NR24	المعامل: 9
الشعب(ة) أو المسلك :	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)		مدة الإنجاز: 4

التمرين الأول (3.5 نقط)	عناصر الإجابة
1-I)	القانون * تبادلي ....0.25ن القانون * تجميعي 0.25ن
2)	العنصر المحايد : $\varepsilon = e$ 0.25ن
3) أ-	$I\setminus\{1\}$ جزء مستقر من $(I,*)$.........................0.25ن القانون المستخلص من *تبادلي وتجميعي ويقبل ε كعنصرمحايد في $I\setminus\{1\}$ ....0.25ن جميع عناصر $I\setminus\{1\}$ تقبل مماثلا في $I\setminus\{1\}$ 0.25ن
ب-	تطبيق الخاصية المميزة لزمرة جزئية.........................0.25ن
4)أ-	$a*(b\times c)=(a*b)\times(a*c)$ 0.25ن
ب-	$(I,\times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد هو 1...........................0.25ن القانون * توزيعي بالنسبة للقانون× و $(I\setminus\{1\},*)$ زمرة تبادلية.........0.25ن
1-II)	نجد : $A^2=\begin{pmatrix}4&4&0\\-4&-4&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ ....0.25ن و $A^3=O$ 0.25ن
2)	إذا كانت A تقبل مقلوبا نستنتج أن $A^2=O$ و هذا تناقض.........................0.5 ن
التمرين الثاني (3.5 نقط)	عناصر الإجابة
1) أ-	الجذران المربعان هما $2+i$ و $-2-i$ 0.25ن
ب-	حلا المعادلة هما: $-\frac{1}{2}+i$ و $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$ 0.5ن
2) أ-	.......................0.25ن
ب-	.................0.75ن
3) أ-	نحصل على : $d=(1-i)c-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$ 0.5ن

Moutamadris.ma

ب-	نحصل على : $\ell=(1-i)c-1-\frac{1}{2}i$ 0.5ن
ج-	نحصل على: $\frac{\ell-c}{a-c}=i$ ....0.25ن ثم نستنتج أن: -المثلث ACL متساوي الساقين رأسه C ....0.25ن - المثلث ACL قائم الزاوية في C 0.25ن
التمرين الثالث (3 نقط)	عناصر الإجابة
(1	نجد $m\equiv 2\ [5]$ أو $m\equiv 3\ [5]$ 1ن
(2 أ-	لدينا : $n^2\equiv -1\ \ [p]$ إذن $(n^2)^{1+2k}\equiv(-1)^{1+2k}\ [p]$ 0.25ن
ب-	لدينا $n^2+1\equiv\ \ [p]$ إذن: $kp-n^2=1\ \ (\exists k\in\mathbb{Z})$ وحسب مبرهنة بوزو 0.5ن
ج-	حسب مبرهنة فيرما وكون: $p-1=2+4k$ 0.75ن
د-	من الأسئلة السابقة نستنتج أن : $1\equiv -1\ [p]$ و p عدد أولي فردي و هذا تناقض........0.5ن
التمرين الرابع (6.25 نقط)	عناصر الإجابة
(I-1	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ 0.5ن
(2	f تزايدية على المجال $\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ و تناقصية على المجال $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right[$ ....0.5ن جدول تغيرات f 0.25ن
(3	معادلة نصف المماس..........................0.25ن إنشاء (C) 0.5ن
(4	نحصل على $a=2\left(\frac{e-1}{e}\right)$ ....0.25ن مساحة الحيز المستوي هي: $8\left(\frac{e-1}{e}\right)cm^2$ 0.25ن
(II-1 أ-	.........................0.25ن
ب-	لدينا : $0<x^ne^{-x^2}<x^ne^{-x}\quad(\forall x>1)$ و نحصل على $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=0$ 0.25ن
(2	f_n تزايدية على المجال $\left[0,\sqrt{\frac{n}{2}}\right]$ و تناقصية على المجال $\left[\sqrt{\frac{n}{2}},+\infty\right[$ ....0.5ن جدول تغيرات f_n 0.25ن
(3	لدينا : $f_n(0)=0<1$ و $f_n(1)=\frac{4}{e}>1$ و f_n متصلة و رتيبة قطعا على المجال $[0,1]$ 0.5ن
(4 أ-	لدينا: $f_{n+1}(u_n)=4u_n^{n+1}e^{-u_n^2}=u_n$ 0.25ن
ب-	لدينا : $f_{n+1}(u_n)=u_n<1=f_{n+1}(u_{n+1})$ و f_{n+1} وتزايدية قطعا على المجال $[0,1]$ إذن المتتالية $(u_n)_{n\geq 2}$ تزايدية قطعا..................................0.5ن

Moutamadris.ma

	المتتالية $(u_n)_{n\geq 2}$ تزايدية قطعا و مكبورة بالعدد 1 إذن متقاربة 0.25ن
5) أ-	لدينا : $0\leq \ell \leq 1$ و $(u_n)_{n\geq 2}$ تزايدية قطعا إذن $u_n > u_2 > 0 \quad (\forall n > 2)$...........0.25ن
ب-	لدينا : $f_n(u_n)=1$ تكافئ $\ln(4)+n\ln(u_n)=u_n^2$ وبما أن: $0<u_n<1$ 0.25ن
ج-	لدينا : $\frac{\ln(4)}{n}-\frac{1}{n}<\ln(u_n)<-\frac{\ln(4)}{n} \quad (\forall n\geq 2)$ والدالة $x\to\ln(x)$ متصلة على $]0,1]$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell$ عندما تؤول n إلى $+\infty$ نحصل على $\ln(\ell)=0$ ....0.5ن و تقبل أية طريقة صحيحة أخرى
التمرين الخامس (3.75 نقط)	عناصر الإجابة
1)	الدالة F فردية 0.25ن
2) أ-	.........................0.25ن
ب-	الدالة φ دالة أصلية للدالة $t\to\frac{1}{\ln(1+t^2)}$ على المجال $]0,+\infty[$ أو الدالة $t\to\frac{1}{\ln(1+t^2)}$ متصلة على المجال $]0,+\infty[$ والدالتين $u:x\to 2x$ و $v:x\to x$ قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ و $u(\mathbb{R}_+^*)=\mathbb{R}_+^*$ و $v(\mathbb{R}_+^*)=\mathbb{R}_+^*$ ....0.25ن و تقبل أية طريقة صحيحة أخرى لدينا $F'(x)=\frac{2}{\ln(1+4x^2)}-\frac{1}{\ln(1+x^2)}$ 0.25ن
ج-	الدالة تناقصية قطعا على المجال $]0,\sqrt{2}]$ و تزايدية قطعا على المجال $[\sqrt{2},+\infty[$.............0.5ن
3) أ-	لدينا: $F(x)=\varphi(2x)-\varphi(x) \quad (\forall x>0)$ حيث φ دالة أصلية للدالة $t\to\frac{1}{\ln(1+t^2)}$ على المجال $]0,+\infty[$ ثم نطبق مبرهنة التزايدات المنتهية 0.5ن
ب-	الدالة $t\to\frac{1}{\ln(1+t^2)}$ تناقصية قطعا على $[x,2x]$.............0.5ن
ج-	نجد: $\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=0$ و تمنح 0.25 ن لكل نهاية
د-	تمنح 0.25ن لكل متفاوتة لدينا $F(x)<x \quad (\forall x>\sqrt{e-1})$ و $F(x)>x \quad \left(\forall x<\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right)$ ويوجد عدد وحيد α من المجال $\left]\frac{\sqrt{e-1}}{2},\sqrt{e-1}\right[$ بحيث $F(\alpha)=\alpha$ 0.25ن

Moutamadris.ma