



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2011
الموضوع



الصفحة
1
4

9	المعامل	NS24	الرياضيات	المادة
4	مدة الإجابة	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)		الشعب (ة) أو المجلد

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع (4) ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالبنيات الجبرية.....(4ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالحسابيات..... (2.5ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالأعداد العقدية.....(3.5ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل.....(6.5ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل.....(3.5ن)

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الأول: (4 نقط) الجزء الأول والثاني مستقلان

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ و } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{ في الحلقة الواحدية } (M_3(\mathbb{Q}), +, \times) \text{ نعتبر المصفوفتين :}$$

(نضع: $A^0 = I$ و $A^1 = A$ و $A^2 = A \times A$ و $A^{n+1} = A^n \times A$ لكل n من \mathbb{N})

0.5 ن-1 بين أن: $(\forall k \in \mathbb{N}) A^{2k} = I$

0.5 ن-2 بين أن المصفوفة A تقبل مقلوبا A^{-1} ينبغي تحديده.

الجزء الثاني: ليكن a عددا حقيقيا .

لكل x و y من المجال $]a, +\infty[$ نضع: $x * y = (x - a)(y - a) + a$

0.5 ن-1 (أ) بين أن $*$ قانون تركيب داخلي في I .

0.5 ن-2 (ب) بين أن القانون $*$ تبادلي و تجميعي.

0.5 ن-3 (ج) بين أن $(I, *)$ يقبل عنصرا محايدا يتم تحديده.

0.5 ن-4 بين أن $(I, *)$ زمرة تبادلية.

3- نعتبر التطبيق: $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}_+^*$

$$x \mapsto \frac{1}{x - a}$$

0.5 ن-5 (أ) بين أن التطبيق φ تشاكل تقابلي من $(I, *)$ نحو (\mathbb{R}_+^*, \times)

0.5 ن-6 (ب) حل في المجموعة I المعادلة: $x^{(3)} = a^3 + a$ حيث: $x^{(3)} = x * x * x$

التمرين الثاني: (2.5 نقط)

ليكن N العدد الصحيح الطبيعي الممثل في نظمة العد العشري بما يلي: $N = \underbrace{111\dots\dots 11}_{2010 \text{ مر } 1^5}$

0.25 ن-1 بين أن العدد N يقبل القسمة على 11

0.75 ن-2 (أ) تحقق أن العدد 2011 أولي و أن $10^{2010} - 1 = 9N$

0.5 ن-3 (ب) بين أن العدد 2011 يقسم العدد $9N$

0.5 ن-4 (ج) استنتج أن العدد 2011 يقسم العدد N

0.5 ن-5 -3 بين أن العدد N يقبل القسمة على 22121

التمرين الثالث: (3.5 نقط)

الجزء الأول: ليكن m عددا عقديا غير منعدم. نعتبر في المجموعة \square المعادلة ذات المجهول z :

$$(E_m): z^2 + [(1-i)m - 4]z - im^2 - 2(1-i)m + 4 = 0$$

1- تحقق أن العدد $z_1 = -m + 2$ حل للمعادلة (E_m) 0.5ن

2- ليكن z_2 الحل الثاني للمعادلة (E_m)

(أ) بين أن: $im^2 + 2(1-i)m - 3 = 0 \Leftrightarrow z_1 z_2 = 1$ 0.5ن

(ب) حدد قيمتي m بحيث: $z_1 z_2 = 1$ 1ن

الجزء الثاني: المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر (O, \vec{u}, \vec{v}) .

نعتبر التطبيق S الذي يربط النقطة M التي لحقها z بالنقطة M' التي لحقها z' بحيث: $z' - 1 = -(z - 1)$

و الدوران R الذي مركزه النقطة Ω ذات اللق $(1+i)$ وقياس زاويته $\frac{\pi}{2}$ وليكن z'' لحق النقطة $M'' = R(M)$

1- (أ) بين أن التطبيق S هو التماثل المركزي الذي مركزه النقطة ذات اللق 1 0.25ن

(ب) بين أن: $z'' = iz + 2$ 0.25ن

2- نفترض أن النقطة M تخالف النقطة O أصل المعلم ولتكن A النقطة التي لحقها 2

(أ) احسب $\frac{z'' - 2}{z - 2}$ ثم استنتج طبيعة المثلث $AM'M''$ 0.5ن

(ب) حدد مجموعة النقط M بحيث تكون النقط A و Ω و M' و M'' متداورة. 0.5ن

التمرين الرابع: (6.5 نقط)

الجزء الأول: دراسة الحلول الموجبة للمعادلة: $(E): e^x = x^n$ حيث n عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة $D = [0, 1[\cup]1, +\infty[$ بما يلي: $f(x) = \frac{x}{\ln x}$; $x \neq 0$
 $f(0) = 0$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1- تحقق أنه لكل x من المجموعة $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ لدينا: $e^x = x^n \Leftrightarrow n = f(x)$ 0.25ن

2- بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 0.5ن

3- احسب النهايات: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ ثم أول هندسيا النتائج المحصل عليها. 1.5ن

4- ادرس تغيرات الدالة f على كل من المجالين $]0, 1[$ و $]1, +\infty[$ ثم أعط جدول تغيراتها. 0.75ن

5- بين أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف يتم تحديد زوج إحداثيتها. 0.5ن

6- انشئ المنحنى (C) 0.5ن

7- بين أنه إذا كان $n \geq 3$ فإن المعادلة (E) تقبل بالضبط حلين اثنين a_n و b_n بحيث: $1 < a_n < e < b_n$

0.5ن

الجزء الثاني: دراسة تقارب المتتاليتين $(a_n)_{n \geq 3}$ و $(b_n)_{n \geq 3}$

1- بين أن: $(\forall n \geq 3) b_n \geq n$ ثم استنتج نهاية المتتالية $(b_n)_{n \geq 3}$

0.5ن

2- (أ) بين أن المتتالية $(a_n)_{n \geq 3}$ تناقصية ثم استنتج أنها متقاربة.

0.5ن

(ب) بين أن: $(\forall n \geq 3) \frac{1}{n} < \ln(a_n) < \frac{e}{n}$ ثم استنتج نهاية المتتالية $(a_n)_{n \geq 3}$

0.5ن

(ج) بين أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^n = e$

0.5ن

التمرين الخامس: (3.5 نقط)

نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بما يلي: $F(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$

1- (أ) بين أن: $(\forall x \geq 0) 0 \leq F(x) \leq xe^{-x^2}$

0.5ن

(ب) بين أن: $(\forall x \geq 1) e^{-x^2} \leq e^{-x}$ ثم استنتج نهاية الدالة F عند $+\infty$

0.5ن

2- بين أن F قابلة للاشتقاق على المجال $[0; +\infty[$ وأن: $(\forall x \geq 0) F'(x) = e^{-2x^2} - 2xF(x)$

0.5ن

3- نعتبر الدالة العددية G المعرفة على المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ بما يلي: $G(x) = F(\tan x)$; $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$
 $G\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

(أ) بين أن الدالة G متصلة على اليسار في $\frac{\pi}{2}$

0.25ن

(ب) بين أنه يوجد عدد حقيقي c من المجال $]0; +\infty[$ بحيث: $F'(c) = 0$ وأن: $F(c) = \frac{1}{2c} e^{-2c^2}$

0.75ن

(يمكنك تطبيق مبرهنة رول (ROLLE) بالنسبة للدالة G على المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$)

4- نعتبر الدالة العددية H المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بما يلي: $H(x) = F'(x) \frac{e^{x^2}}{2x}$

(أ) بين أن الدالة H تناقصية قطعاً على المجال $]0; +\infty[$

0.5ن

(ب) استنتج أن العدد c وحيد ثم أعط جدول تغيرات الدالة F.

0.5ن

انتهى



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2011
عناصر الإجابة

الصفحة
1
3



9	المعامل	NR24	الرياضيات	المادة
4	مادة الإجابة		شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	الشعب (ة) أو المجلد

عناصر الإجابة و سلم التقيط

التمرين الأول	4 نقط
الجزء الأول: -1	البرهان بالترجع0.5
-2	$A^{-1} = A$0.5
الجزء الثاني: (أ-1)	* قانون تركيب داخلي0.5
(ب)	تبادلية القانون *0.25 تجميعية القانون *0.25
(ج)	العنصر المحايد : $e = a + 1$0.5
-2	مماثل x هو : $x' = a + \frac{1}{x-a}$0.25 زمرة تبادلية $(I, *)$0.25
(أ-3)	φ تقابل0.25 φ تشاكل0.25
(ب)	حل المعادلة هو: $x = 2a$ إذا كان $a \geq 0$ و المعادلة لا تقبل حلا إذا كان $a < 0$0.5

التمرين الثاني	2.5 نقطة
-1	قابلية قسمة العدد N على 110.25
(أ-2)	التحقق من أن 2011 عدد أولي0.5 التحقق من أن $10^{2010} - 1 = 9N$0.25
(ب)	حسب ميرهنة فيرما : 2011 يقسم العدد $10^{2010} - 1$0.5
(ج)	الإستنتاج باستعمال ميرهنة كوص0.5
-3	نلاحظ أن: $22121 = 11 \times 2011$ وأن 2011 و 11 عددين أوليين فيما بينها0.5
التمرين الثالث	3.5 نقطة
الجزء الأول: -1	التحقق0.5
(أ-2)	التكافؤ0.5
(ب)	قيمتي m هما : $\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right) + i\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$ و $\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) + i\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$ان
الجزء الثاني: (أ-1)0.25
(ب)	$z'' - (1+i)z = i(z - (1+i))$0.25

0.25..... $\frac{z'' - 2}{z - 2} = -i$	(أ-2)
0.25..... $AM'M''$ متساوي الساقين و قائم الزاوية في A	(ب)
0.5..... المستقيم الذي معادلته: $x = 1$	

التمرين الرابع	6.5 نقطة
الجزء الأول	
-1	0.25..... $e^x = x^n \Leftrightarrow n = f(x)$
-2	قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في 0 0.5.....
-3	لكل نهاية من النهايات الأربعة 0.25..... لكل تأويل من التأويلين 0.25.....
-4	حساب $f'(x)$ 0.25..... تغييرات f 0.25..... جدول تغييرات f 0.25.....
-5	زوج إحداثيتي نقطة الانعطاف $\left(e^2; \frac{e^2}{2}\right)$ 0.5.....
-6	إنشاء المنحنى 0.5.....
-7	وجود و وحدانية a_n و $1 < a_n < e$ 0.25..... وجود و وحدانية b_n و $b_n > e$ 0.25.....
الجزء الثاني	
-1	0.25..... $(\forall n \geq 3) b_n \geq n$ 0.25..... $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$
(أ-2)	المتتالية $(a_n)_{n \geq 3}$ تناقصية 0.25..... استنتاج تقارب $(a_n)_{n \geq 3}$ 0.25.....
(ب)	تأطير: $\ln(a_n)$ 0.25..... استنتاج أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$ 0.25.....
(ج)	استنتاج أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^n = e$ 0.5.....

التمرين الخامس	3.5 نقطة
(أ-1)	تأطير $F(x)$ 0.5 ن
(ب)	0.25 $(\forall x \geq 1) e^{-x^2} \leq e^{-x}$ استنتاج أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$ 0.25 ن
-2	قابلية اشتقاق الدالة F 0.25 ن حساب $F'(x)$ 0.25 ن
(أ-3)	اتصال الدالة G على اليسار في $\frac{\pi}{2}$ 0.25 ن تقبل جميع الحلول الصحيحة: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}} \tan x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$ إذن أو من أجل $\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2}$ لدينا: $0 \leq G(x) = F(\tan x) \leq \tan(x)e^{-\tan x}$ إذن أو أية طريقة صحيحة أخرى
(ب)	- تطبيق مبرهنة رول : وجود $c_1 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ بحيث $G'(c_1) = (1 + \tan^2(c_1))F'(\tan c_1) = 0$ 0.25 ن - وجود $c \in]0, +\infty[$ بحيث $F'(c) = 0$ ($c = \tan c_1$) 0.25 ن - $F(c) = \frac{e^{-2c^2}}{2c}$ 0.25 ن
(أ-4)	الدالة H قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ و $H'(x) = -\left(2 + \frac{1}{2x^2}\right)e^{-x^2} < 0$ 0.5 ن
(ب)	الدالة H تقابل (متصلة و رتيبة قطعاً) و $H(c) = 0$ ومنه وحدانية العدد c 0.25 ن جدول تغيرات الدالة F 0.25 ن