



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة الاستدراكية 2011
الموضوع



الصفحة
1
4

9	المعامل	RS24	الرياضيات	المادة
4	مدة الإجابة		شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	الشعب (ة) أو المجلد

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع (4) ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالبنيات الجبرية.....(3.5 ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالحسابيات(2.5ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالأعداد العقدية.....(4ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل.....(6 ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل.....(4ن)

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الأول: (3.5 نقط)

$$x * y = \frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)} \quad \text{لكل } x \text{ و } y \text{ من المجال }]0,1[\text{ نضع } I =]0,1[$$

1- (أ) بين أن * قانون تركيب داخلي في I .

0.5 ن

(ب) بين أن القانون * تبادلي و تجميعي.

0.5 ن

(ج) بين أن (I, *) يقبل عنصرا محايدا يتم تحديده.

0.5 ن

2- بين أن (I, *) زمرة تبادلية.

0.5 ن

$$3- \text{ نعتبر المجموعتين } H = \{2^n / n \in \mathbb{N}\} \text{ و } K = \left\{ \frac{1}{1+2^n} / n \in \mathbb{N} \right\}$$

(أ) بين أن H زمرة جزئية للزمرة $(\mathbb{N}, +, \times)$

0,5 ن

(ب) نعتبر التطبيق $\varphi : H \rightarrow I$
 $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ بين أن φ تشاكل من (H, \times) نحو $(I, *)$.

0,5 ن

(ج) استنتج أن K زمرة جزئية للزمرة $(I, *)$

0.5 ن

التمرين الثاني: (2.5 نقط)

ليكن x عددا صحيحا طبيعيا يحقق: $10^x \equiv 2 \pmod{19}$

1 - (أ) تحقق أن: $10^{x+1} \equiv 1 \pmod{19}$

0.25 ن

(ب) بين أن: $10^{18} \equiv 1 \pmod{19}$

0.5 ن

2- ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين 18 و $x+1$

(أ) بين أن: $10^d \equiv 1 \pmod{19}$

0.75 ن

(ب) بين أن: $d = 18$

0.5 ن

(ج) استنتج أن: $x \equiv 17 \pmod{18}$

0.5 ن

التمرين الثالث: (4 نقط)

الجزء الأول: نعتبر في المجموعة \square المعادلة: (E) $z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = 0$

1- تحقق أن العدد $-2i$ حل للمعادلة (E) 0.5

2- حدد العددين العقديين α و β بحيث: 0.5

$$(\forall z \in \square) : z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = (z+2i)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

3- أ) حدد الجذرين المربعين للعدد $5-12i$ 0.5

ب) حل في \square المعادلة (E) 0.5

الجزء الثاني: المستوى العقدي منسوب لمعلم متعامد ممنظم مباشر.

نعتبر النقط A و B و C التي أحاقها على التوالي هي : $a = -1+3i$ و $b = -2i$ و $c = 2+i$

1- بين أن المثلث ABC قائم الزاوية ومتساوي الساقين في C 0.5

2- نعتبر الدوران R_1 الذي مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{3}$ و الدوران R_2 الذي مركزه A وزاويته $\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

لتكن M نقطة من المستوى العقدي لحقها z و M_1 صورتها بالدوران R_1 و M_2 صورتها بالدوران R_2

أ) تحقق أن الصيغة العنقودية للدوران R_1 هي : $z' = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z - \sqrt{3} - i$ 0.5

ب) حدد z_2 لحق M_2 بدلالة z 0.5

ج) استنتج أن النقطة I منتصف القطعة $[M_1M_2]$ ثابتة. 0.5

التمرين الرابع: (6 نقط)

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ بما يلي: $f(x) = x + \ln x$ وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة

f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) . (نأخذ: $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1\text{cm}$)

1- احسب النهايات التالية: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$ 1

2- أ) ضع جدول تغيرات الدالة f 0.25

ب) بين أن الدالة f تقابل من المجال $]0, +\infty[$ نحو مجال J يتم تحديده ، ثم ضع جدول تغيرات التقابل العكسي f^{-1} . 0.75

3- احسب $f(1)$ و $f(e)$ ثم أنشئ (C) و (C') منحنى الدالة f^{-1} في نفس المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) 0.75

4- أ) احسب التكامل $\int_1^{e+1} f^{-1}(x) dx$ (يمكنك وضع: $t = f^{-1}(x)$) 0.5

ب) استنتج مساحة حيز المستوى المحصور بين (C') و المستقيمت ذات المعادلات: $x=1$ و $x=e+1$ و $y=x$ 0.5

5- لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نعتبر المعادلة $(E_n) : x + \ln x = n$

(أ) بين أن المعادلة (E_n) تقبل حلا وحيدا x_n

(ب) حدد قيمة x_1 ثم بين أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$

6- (أ) بين أن: $(\forall n \in \mathbb{L}^*) f(x_n) \leq f(n)$ ثم استنتج أن: $x_n \leq n$ ($\forall n \in \mathbb{L}^*$)

(ب) بين أن $(\forall n \in \mathbb{L}^*) n - \ln(n) \leq x_n$

(ج) احسب النهايتين: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n - n}{n}$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n - \ln(n)}$

التمرين الخامس: (4 نقط)

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم و f_n الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بما يلي :

$$f_n(x) = -1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n}$$

1- بين أنه من أجل $n \geq 2$ يوجد عدد حقيقي وحيد α_n من المجال $]0,1[$ بحيث: $f_n(\alpha_n) = 0$

2- بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ تناقصية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة. (نضع $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$)

3- (أ) تحقق أنه من أجل $t \neq 1$ لدينا: $1 + t + t^2 + \dots + t^{n-1} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}$

(ب) استنتج أن: $\alpha_n + \frac{\alpha_n^2}{2} + \dots + \frac{\alpha_n^n}{n} = -\ln(1 - \alpha_n) - \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t} dt$

4- (أ) بين أن: $1 + \ln(1 - \alpha_n) = -\int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t} dt$

(ب) بين أن: $0 \leq \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{(n+1)(1-\alpha_n)}$ ($\forall n \geq 2$)

(ج) استنتج أن: $\ell = 1 - e^{-1}$

انتهى



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة الاستدراكية 2011
عناصر الإجابة



الصفحة
1
2

9	المعامل	RR24	الرياضيات	المادة
4	مادة الإقراض		شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	الشعب (ة) أو المجلد

		التمرين الأول
-1	أ	* قانون تركيب داخلي 0,5 ن
	ب	* تبادلي 0,25 ن * تجميعي 0,25 ن
	ج	$\frac{1}{2}$ عنصر محايد, 0,5 ن
-2		مماثل عنصر 0,25 ن (I, *) زمرة تبادلية 0,25 ن
-3	أ	H زمرة جزئية 0,5 ن
	ب	φ تشاكل 0,5 ن
	ج	K زمرة جزئية 0,5 ن
		التمرين الثاني
-1	أ	$10^{x+1} \equiv 1 [19]$ 0,25 ن
	ب	$10^{18} \equiv 1 [19]$ 0,5 ن
-2	أ	$10^d \equiv 1 [19]$, 0,75 ن
	ب	d = 18, 0,5 ن
	ج	الاستنتاج 0,5 ن
		التمرين الثالث
-1		الجزء الأول: التحقق 0,5 ن
-2		. تحديد α و β 0,5 ن
-3	أ	. تحديد الجذرين المربعين 0,5 ن
	ب	حل المعادلة 0,5 ن
-1		الجزء الثاني: متساوي الساقين 0,25 ن قائم الزاوية 0,25 ن
-2	أ 0,5 ن
	ب 0,5 ن
	ج	الإستنتاج 0,5 ن

		التمرين الرابع
	-1	عن كل نهاية..... 0,25 ن
	-2 (أ)	جدول التغيرات, 0,25 ن
	(ب)	الدالة f تقابل من Π_+^* نحو Π_- 0,5 ن جدول تغيرات التقابل العكسي 0,25 ن
	-3	إنشاء (C) 0,25 ن إنشاء (C') 0,5 ن
	-4 (أ)	حساب التكامل, 0,5 ن
	(ب)	حساب المساحة 0,5 ن
	-5 (أ)	وجود ووحدانية الحل 0,25 ن
	(ب)	تحديد قيمة X_1 , 0,25 ن حساب النهاية, 0,25 ن
	-6 (أ)	المتفاوتة 0,25 ن الاستنتاج 0,25 ن
	(ب)	المتفاوتة 0,5 ن
	(ج)	كل نهاية 0,25 ن

		التمرين الخامس
	-1	وجود ووحدانية α_n 0,5 ن
	-2	المتتالية تناقصية قطعا 0,5 ن المتتالية مصغورة 0,25 ن
	-3 (أ)	التحقق 0,5 ن
	(ب)	الاستنتاج 0,5 ن
	-4 (أ)	إثبات المتساوية 0,5 ن
	(ب)	تأطير التكامل 0,5 ن
	(ج)	استنتاج قيمة I 0,75 ن