

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة الاستدراكية 2014
الموضوع

RS 24

ⵜⴰⵎⴰⵔⴰⵏⵜ ⵏ ⵏⵓⵔⵓⵏⵜ
ⵜⴰⵎⴰⵔⴰⵏⵜ ⵏ ⵏⵓⵔⵓⵏⵜ
ⵏ ⵏⵓⵔⵓⵏⵜ



المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

4	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و(ب)	الشعبة أو المسلك

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من ستة تمارين مستقلة فيما بينها.
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بحساب الاحتمالات.....(2ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالحسابيات.....(1ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالبنيات الجبرية.....(3.75ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالأعداد العقدية.....(3.25ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل.....(7.5ن)
- التمرين السادس يتعلق بالتحليل.....(2.5ن)

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الأول: (2 ن)

نعتبر ثلاثة صناديق U و V و W .
يحتوي الصندوق W على كرة سوداء و كرتين بيضاوين و يحتوي كل صندوق من الصندوقين U و V على كرتين سوداوين و كرتين بيضاوين.

نقوم بالتجربة التالية : نسحب كرة من الصندوق W. إذا كانت هذه الكرة بيضاء نضعها في الصندوق U ثم نسحب منه تانيا كرتين ، أما إذا كانت هذه الكرة سوداء فنضعها في الصندوق V ثم نسحب منه تانيا كرتين.

- 1- ما هو احتمال أن يتم السحب من الصندوق U ؟ 0.25
2- ما هو احتمال الحصول على كرتين بيضاوين في نهاية التجربة؟ 0.75
3- ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات البيضاء المحصل عليها في نهاية التجربة.
حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X 1

التمرين الثاني: (1 ن)

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم.

$$\text{نضع: } b_n = 2 \cdot 10^n + 1 \text{ و } c_n = 2 \cdot 10^n - 1$$

- 1- بين أن: $c_n \neq c_n$ c_n ظ b_n ثم استنتج أن b_n و c_n أوليان فيما بينهما. 0.5

(b ظ a هو القاسم المشترك الأكبر للعددين الصحيحين a و b)

- 2- أوجد زوجا (x_n, y_n) من ϕ^2 يحقق: $b_n x_n + c_n y_n = 1$ 0.5

التمرين الثالث: (3,75 ن)

نضع $J =]-1, 1[$

1- لكل عنصرين a و b من المجال J ، نضع: $a * b = \frac{a+b}{1+ab}$

- 1- تحقق أن: $1 + ab > 0$ (" J^2 خ (a,b) ") ثم استنتج أن * قانون تركيب داخلي في J 0.75

2- (أ) بين أن القانون * تبادلي و تجمعي. 0.5

(ب) بين أن (J, *) يقبل عنصرا محايدا يتم تحديده. 0.25

(ج) بين أن (J, *) زمرة تبادلية. 0.5

II - نعتبر التطبيق f المعرف على \mathbb{R} بما يلي: $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

1- بين أن الدالة f تقابل من \mathbb{R} نحو J 0.75

2- ليكن g التقابل العكسي للتطبيق f (تحديد g غير مطلوب) .

لكل عنصرين x و y من J نضع: $x \perp y = f(g(x) \times g(y))$

بين أن f تشكل من (\mathbb{R}^*, \perp) نحو (J^*, \perp) حيث: $J^* = J - \{0\}$ 0.5

3- نذكر أن (\mathbb{R}^*, \times) زمرة تبادلية، ونقبل أن القانون \perp توزيعي بالنسبة للقانون * في J .

بين أن $(J, *, \perp)$ جسم تبادلي. 0.5

التمرين الرابع: (3.25 ن)

1- I حل في f المعادلة: $z^2 + i = 0$ (a يرمز لحل المعادلة بحيث: $\text{Re}(a) > 0$) 0.5

2- (أ) حدد معيار و عمدة العدد العقدي $1 + a$ 0.5

(ب) استنتج أن: $\cos \frac{p}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ 0.25

(ج) تحقق أن: $(1+a)(1-a) = 1-a$ ثم استنتج الشكل المثلثي للعدد $1-a$ 0.5

II - في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر (O, u, v) ، نعتبر النقط A و B و M و M' التي ألقاها على التوالي هي a و $-a$ و z و z' و نفترض أن: $zz' + i = 0$

1- لتكن N النقطة التي لحقها \bar{z} مرافق z
بين أن المستقيمين (ON) و (OM') متعامدان. 0.25

2- (أ) بين أن : $z' - a = i \frac{z - a}{az}$ 0.25

(ب) بين أنه إذا كان $z^1 - a$ فإن $z'^1 - a$ و $\frac{z' - a}{z' + a} = -\frac{z - a}{z + a}$ 0.5

3- نفترض أن النقط A و B و M غير مستقيمية.
بين أن النقطة M' تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث ABM 0.5

التمرين الخامس: (7.5 نقط)

I - لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ بما يلي: $f(x) = \frac{-\ln x}{\sqrt{x}}$

وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم (O, i, j) بحيث: $\|i\| = 1 \text{ cm}$

1- أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجتين المحصل عليهما. 1

2- أحسب $f'(x)$ ثم استنتج تغيرات الدالة f على المجال $]0, +\infty[$ 0.75

3- لكل n من \mathbb{N}^* نعتبر الدالة العددية g_n المعرفة على $]0, 1[$ بما يلي: $g_n(x) = f(x) - x^n$

(أ) بين أن الدالة g_n تناقصية قطعاً على المجال $]0, 1[$ 0.25

(ب) استنتج أنه لكل n من \mathbb{N}^* ، يوجد عدد حقيقي وحيد α_n من المجال $]0, 1[$ بحيث: $f(\alpha_n) = (\alpha_n)^n$ 0.5

(ج) بين أن لكل n من \mathbb{N}^* لدينا: $g_n(a_{n+1}) < 0$ 0.5

(د) بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ تزايدية قطعاً ثم استنتج أنها متقاربة. 0.75

4- نضع $l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

(أ) تحقق أن $0 < a_1 \leq 1 \leq a_2$ 0.25

(ب) تحقق أن: $h(a_n) = n$ (" $n \in \mathbb{N}^*$ ") حيث: $h(x) = -\frac{1}{2} + \frac{\ln(-\ln(x))}{\ln x}$ 0.25

(ج) بين أن: $l = 1$ 0.5

(د) استنتج أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n)^n = 0$ 0.25

II - (أ) أدرس إشارة التكامل $\int_x^1 f(x) dx$ لكل x من \mathbb{R}_+ 0.25

(ب) باستعمال طريقة المكاملة بالأجزاء بين أن: $\int_x^1 f(x) dx = 4 - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x} \ln x$ (" $x \in \mathbb{R}_+$ ") 0.5

(ج) استنتج بالوحدة cm^2 مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى (C) و المستقيمت التي معادلاتها على التوالي: 0.25

$x = 1$ و $x = e^2$ و $y = 0$

$$2- \text{ لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم } n \text{ نضع: } u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

(أ) بين أنه لكل عددين صحيحين طبيعيين n و k بحيث $n \geq 2$ و $1 \leq k \leq n-1$ لدينا:

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

(ب) بين أن : $\int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt \leq u_n \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt$ ("n خ *")

(ج) استنتج أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$

التمرين السادس (2.5 نقط)

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بما يلي: $g(x) = \int_{\sqrt{x}}^1 e^{-t^2} dt$

1- لكل x من ، نضع : $k(x) = \int_1^x e^{-t^2} dt$

(أ) تحقق أنه لكل x من المجال $[0, +\infty[$ لدينا: $g(x) = -k(\sqrt{x})$

(ب) بين أن الدالة g متصلة على $[0, +\infty[$ وقابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$

(ج) احسب $g'(x)$ لكل x من $]0, +\infty[$ ثم استنتج أن الدالة g تناقصية قطعاً على المجال $[0, +\infty[$

2- (أ) بين أن: $\frac{g(x) - g(0)}{x} < -\frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-x}$ ($\forall x \in \mathbb{R}_+^*$)

(ب) استنتج أن الدالة g غير قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 و أعط تأويلاً هندسياً للنتيجة المحصل عليها.

انتهى

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة الاستدراكية 2014
عناصر الإجابة

RR 24

ⵜⴰⵎⴰⵔⴰⵏⵜ ⵏ ⵎⴰⵔⴰⵎⴰⵔⵉⵜ
ⵜⴰⵎⴰⵔⴰⵏⵜ ⵏ ⵙⴰⵎⴰⵔⴰⵏⵜ
ⵏ ⵙⴰⵎⴰⵔⴰⵏⵜ



المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

4	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و(ب)	الشعبة أو المسلك

عناصر الإجابة و سلم التنقيط

النقطة الممنوحة	عناصر الإجابة	2 نقط	التمرين الأول
تمنح 0.25 نقطة	هو احتمال سحب كرة بيضاء من الصندوق W : $\frac{2}{3}$	-1	
تمنح 0.75 نقطة	$p(2b) = p(2b/U) \cdot p(U) + p(2b/V) \cdot p(V) = \frac{7}{30}$	-2	
تمنح 0.25 نقطة لمجموعة القيم تمنح 0.75 نقطة لتحديد قانون الاحتمال	مجموعة قيم X هي: $\{0,1,2\}$ $p(1b) = \frac{18}{30}$ و $p(0b) = \frac{5}{30}$	-3	
		1 نقطة	التمرين الثاني
تمنح 0.25 نقطة تمنح 0.25 نقطة	$b_n = c_n + 2$ و تطبيق مبرهنة أفليديس ثم $2 \cdot 10^n - c_n = 1$ و تطبيق مبرهنة بوزو. و تقبل أية طريقة صحيحة أخرى	-1	
تمنح 0.5 نقطة	زوج معاملات بوزو	-2	
		3.75 نقط	التمرين الثالث
تمنح 0.25 نقطة للتحقق تمنح 0.5 نقطة للاستنتاج	التحقق و الاستنتاج	-1- I	
تمنح 0.25 نقطة تمنح 0.25 نقطة	القانون تبادلي القانون تجميعي	-2 (أ)	
تمنح 0.25 نقطة	تحديد العنصر المحايد	(ب)	



الصفحة	RR 24	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة الاستدراكية 2014 - عناصر الإجابة		
2 4		- مادة : الرياضيات - شعبة العلوم الرياضية (أ) و(ب)		
	تمنح 0.5 نقطة	زمرة تبادلية	(ج)	
	تمنح 0.75 نقطة	تقبل مختلف الأجوبة الصحيحة	-1- II	
	تمنح 0.5 نقطة	التشاكل	-2	
	تمنح 0.5 نقطة	جسم تبادلي بتوظيف التشاكل التبادلي	-3	
			3.25 نقط	التمرين الرابع
	تمنح 0.5 نقطة	حلي المعادلة: $-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ و $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$	-1- I	
	تمنح 0.25 نقطة لكل نتيجة	$\arg(1+a)$ ؛ $-\frac{p}{8}[2p]$ و $ 1+a = \sqrt{2+\sqrt{2}}$	(أ-2)	
	تمنح 0.25 نقطة	الإستنتاج: $\cos\frac{p}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	(ب)	
	تمنح 0.25 نقطة	التحقق	(ج)	
	تمنح 0.25 نقطة	الإستنتاج		
	تمنح 0.25 نقطة	لدينا $\frac{z'}{z}$ تخيلي صرف	-1- II	
	تمنح 0.25 نقطة	المتساوية	(أ-2)	
	تمنح 0.5 نقطة	المتساوية	(ب)	
	تمنح 0.5 نقطة	النقط A و B و M و M' متداورة انطلاقا من نتيجة السؤال 2-ب)	-3	
			7.5 نقط	التمرين الخامس
	تمنح 0.25 نقطة لكل نهاية و0.25 نقطة لكل تأويل هندسي صحيح	حساب النهايتين التأويل الهندسي	-1- I	
	تمنح 0.25 نقطة لحساب $f'(x)$ تمنح 0.5 نقطة للتغيرات	- حساب الدالة المشتقة الأولى تغيرات الدالة	-2	
	تمنح 0.25 نقطة	g_n تناقصية قطعا كمجموع دالتين تناقصيتين	(أ-3)	



الصفحة	RR 24	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة الاستدراكية 2014 - محاضر الإجابة		
3	4	- مادة : الرياضيات - شعبة العلوم الرياضية (أ) و(ب)		
تمنح 0.5 نقطة	لكل n من \mathbb{N}^* الدالة g_n متصلة ورتيبة قطعاً على المجال $]0,1[$ إذن تقابل من $]0,1[$ نحو $]1,+ \infty [$ و تقبل أية طريقة صحيحة أخرى	(ب)		
تمنح 0.5 نقطة	$g_n(a_{n+1}) = a_n^n(a_n - 1)$	(ج)		
تمنح 0.5 نقطة تمنح 0.25 نقطة	المتتالية تزايدية قطعاً : $g_n(a_{n+1}) < g_n(a_n)$ المتتالية متقاربة	(د)		
تمنح 0.25 نقطة	الانطلاق من كون $0 < a_1 < a_n < 1$ و تقبل أية طريقة صحيحة أخرى	(أ-4)		
تمنح 0.25 نقطة	التحقق	(ب)		
تمنح 0.5 نقطة	افتراض أن $1 < 1$ والحصول على تناقض من خلال استعمال نتيجة السؤال السابق وكون الدالة h متصلة في 1 و تقبل أية طريقة صحيحة أخرى	(ج)		
تمنح 0.25 نقطة	استعمال : $f(a_n) = (a_n)^n$ و كون الدالة f متصلة في 1 و تقبل أية طريقة صحيحة أخرى	(د)		
تمنح 0.25 نقطة	إشارة التكامل	(أ-1- II)		
تمنح 0.5 نقطة	حساب التكامل	(ب)		
تمنح 0.25 نقطة	استنتاج المساحة	(ج)		
تمنح 0.5 نقطة	المتفاوتة المزدوجة من خلال كون f تناقصية قطعاً على المجال $]0,1[$	(أ-2)		
تمنح 0.5 نقطة	إثبات المتفاوتة المزدوجة	(ب)		
تمنح 0.5 نقطة	تحديد النهاية	(ج)		
		2.5 نقط	التمرين السادس	
تمنح 0.25 نقطة	التحقق	(أ-1)		
تمنح 0.25 نقطة	الاتصال	(ب)		
تمنح 0.25 نقطة	الاشتقاق			
تمنح 0.25 نقطة	حساب $g'(x)$	(ج)		
تمنح 0.25 نقطة	الاستنتاج			

الصفحة 4 4	RR 24	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة الاستدراكية 2014 - محاضر الإجابة - مادة : الرياضيات - شعبة العلوم الرياضية (أ) و(ب)		
تمنح 0.5 نقطة	تمنح 0.25 نقطة	تمنح 0.5 نقطة إذا حصل المترشح على المتفاوتة مباشرة	<p>- الدالة g متصلة على القطعة $[0, x]$ و قابلة للاشتقاق على المجال $]0, x[$ وتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على القطعة $[0, x]$ بالنسبة للدالة g</p> <p>- الدالة تناقصية قطعا للحصول على المتفاوتة وتقبل أية طريقة صحيحة أخرى</p>	2- (أ)
تمنح 0.25 نقطة	تمنح 0.25 نقطة للتأويل الهندسي		<p>الاستنتاج</p> <p>التأويل الهندسي</p>	(ب)