الحسابيات

I- قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$

1- تعريف

ليكن a و b من $\mathbb{Z}$
نقول إن b يقسم a و نكتب b/a إذا وجد k في $\mathbb{Z}$ حيث $a=kb$
$$(a;b)\in\mathbb{Z}^2 \quad b/a \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z} \quad a=kb$$

2- ملاحظات

*- إذا كان b يقسم a إننا نقول إن b قاسم لـ a أو a مضاعف لـ b

*- ليكن $b\in\mathbb{Z}$ مجموعة مضاعفات العدد b هي المجموعة $b\cdot\mathbb{Z}=\{k\cdot b / k\in\mathbb{Z}\}$

*- ليكن $a\in\mathbb{Z}^*$ $\quad b\in\mathbb{Z}$: $\quad b/a \Rightarrow |b|\le|a|$

3- خاصيات العلاقة " b/a "

*- $a/a \quad \forall a\in\mathbb{Z}$ نقول إن العلاقة "b/a " انعكاسية

*- $\begin{cases} b/a \\ a/c \end{cases} \Rightarrow b/c \quad \forall(a;b;c)\in\mathbb{Z}^3$ نقول إن العلاقة "b/a " متعدية

*- $\begin{cases} b/a \\ a/b \end{cases} \Rightarrow |a|=|b| \quad \forall(a;b;c)\in\mathbb{Z}^3$

ملاحظة

$\begin{cases} b/a \\ a/b \end{cases} \Rightarrow a=b \quad \forall(a;b;c)\in\mathbb{N}^3$ نقول إن العلاقة "b/a " تخالفية في $\mathbb{N}$

تمرين

1- بين أن $b/a \Leftrightarrow a\cdot\mathbb{Z}\subset b\cdot\mathbb{Z} \quad \forall(a;b)\in\mathbb{Z}^2$

2- بين أن $a/(x_1-y_1) \ \wedge \ a/(x_2-y_2) \Leftrightarrow a/(x_1x_2-y_1y_2) \quad \forall(a;x_1;x_2;y_1;y_2)\in\mathbb{Z}^5$

II- القسمة الاقليدية في $\mathbb{Z}$

1- القسمة الاقليدية في $\mathbb{N}$

مبرهنة

ليكن a و b من $\mathbb{N}$ حيث $a\neq b$
يوجد زوج وحيد $(q;r)$ من $\mathbb{N}^2$ حيث $a=bq+r$ حيث $0\le r\prec b$

اصطلاحات

العملية التي تمكننا من تحديد $(q;r)$ بحيث $a=bq+r$ حيث $0\le r\prec b$ تسمى القسمة الاقليدية لـ a على b في $\mathbb{N}$
العدد a يسمى المقسوم و العدد b يسمى المقسوم عليه و العدد q الخارج و r الباقي.

2- القسمة الاقليدية في $\mathbb{Z}$

مبرهنة

ليكن a من $\mathbb{Z}$ و b في $\mathbb{N}^*$ حيث $a\neq b$
يوجد زوج وحيد $(q;r)$ من $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ حيث $a=bq+r$ حيث $0\le r\prec b$

اصطلاحات

العملية التي تمكننا من تحديد $(q;r)$ من $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ بحيث $a=bq+r$ حيث $0\le r\prec b$ تسمى القسمة الاقليدية لـ a على b في $\mathbb{Z}$
العدد a يسمى المقسوم و العدد b يسمى المقسوم عليه و العدد q الخارج و r الباقي

تمرين

حدد الأعداد الصحيحة النسبية x بحيث يكون للقسمة الاقليدية لـ x على 7 خارج q و باقي q^2

تمرين

بين إذا كان للقسمة الاقليدية لـ a على b و القسمة الاقليدية لـ a' على b نفس الخارج q و كان $a \prec x \prec a'$ فان q خارج القسمة الاقليدية لـ x على b

III- الموافقة بترديد n

1- تعريف

ليكن a و b من $\mathbb{Z}$ و n من $\mathbb{N}$

نقول إن a يوافق b بترديد n و نكتب $a \equiv b \quad [n]$ إذا كان n يقسم $a-b$

$$\forall (a;b) \in \mathbb{Z}^2 \quad a \equiv b \quad [n] \Leftrightarrow n/a-b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad a-b=kn$$

2- خاصيات العلاقة " الموافقة بترديد n"

أ- $\forall a \in \mathbb{Z} \quad a \equiv a \quad [n]$ نقول إن العلاقة " الموافقة بترديد n" انعاكسية

ب- $\forall (a;b) \in \mathbb{Z} \quad a \equiv b \quad [n] \Rightarrow b \equiv a \quad [n]$ نقول إن العلاقة " الموافقة بترديد n" تماثلية

ج- $\forall (a;b) \in \mathbb{Z} \quad (a \equiv b \quad [n]) et (b \equiv c \quad [n]) \Rightarrow a \equiv c \quad [n]$ نقول إن العلاقة " الموافقة بترديد n" متعدية

نلخص الخاصيات أ و ب و ج بقولنا إن العلاقة " الموافقة بترديد n" علاقة تكافؤ

د- خاصية

ليكن a و b من $\mathbb{Z}$ و n من $\mathbb{N}$

$a \equiv b \quad [n]$ تكافئ a و b لهما نفس باقي القسمة الاقليدية على n

البرهان

ليكن a و b من $\mathbb{Z}$ و n من $\mathbb{N}$ بحيث $a = nq_1 + r_1$ و $b = nq_2 + r_2$ مع $0 \le r_1 \prec n$ و $0 \le r_2 \prec n$

❖ إذا كان a و b لهما نفس باقي القسمة الاقليدية على n أي $r_1 = r_2$ فان $a-b = n(q_1 - q_2)$

أي أن $a \equiv b \quad [n]$

❖ عكسيا إذا كان $a \equiv b \quad [n]$ فانه يوجد k من $\mathbb{Z}$ حيث $a-b=nk$

و منه $r_1 - r_2 = (k - q_1 - q_2)n$ أي n يقسم $r_1 - r_2$

و لدينا $0 \le r_1 \prec n$ و $0 \le r_2 \prec n$ ومنه $|r_1 - r_2| \prec n$

و بالتالي $r_1 - r_2 = 0$ أي $r_1 = r_2$

3- المجموعة $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

* - $\forall (a;n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \quad \exists (q;r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \quad a = nq + r \quad et \quad 0 \le r \prec n$

- $\forall (a;n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \quad \exists r \in \mathbb{N} \quad a \equiv r \quad [n] \quad et \quad r \in \{0;1;.....;n-1\}$

- المجموعة $\{x \in \mathbb{Z} / x \equiv r \quad [n]\}$ هي مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية التي لها نفس الباقي r في القسمة الاقليدية على n نرمز لها بـ $\bar{r}$

المجموعة $\bar{r}$ تسمى صنف تكافؤ r بالنسبة للعلاقة " الموافقة بترديد n"في $\mathbb{Z}$

- $x \in \bar{r} \Leftrightarrow x \equiv r \quad [n]$

* - $\forall a \in \mathbb{Z} \quad \exists r \in \{0;1;....;n-1\} / \quad a \equiv r \quad [n]$ أي $\forall a \in \mathbb{Z} \quad \exists r \in \{0;1;....;n-1\} / \quad \bar{a} = \bar{r}$

* - إذا كان $\bar{r} = \bar{r'}$ و $0 \le r \prec n$ و $0 \le r' \prec n$ فان $r = r'$

* - $\forall (x;n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \quad \exists r \in \{0;1;..;n-1\} / \quad x \in \bar{r}$ (r باقي القسمة الاقليدية على n)

اذن $\mathbb{Z} = \bar{0} \cup \bar{1} \cup \bar{2} \cup .... \cup \overline{(n-1)}$

المجموعة $\{\bar{0}; \bar{1}; .....; \overline{n-1}\}$ يرمز لها بالرمز $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

عناصر $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ منفصلة مثنى مثنى

أمثلة

* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}=\{\bar{0};\bar{1}\}$ حيث $\bar{0}=2\cdot\mathbb{Z}$ و $\bar{1}=\{x\in\mathbb{Z}/x=2k+1\quad(k\in\mathbb{Z})\}$

* $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}=\{\bar{0};\bar{1};\bar{2};\bar{3};\bar{4};\bar{5};\bar{6}\}$ حيث $\bar{0}=7\cdot\mathbb{Z}$ و $\bar{1}=\{x\in\mathbb{Z}/x=7k+1\quad(k\in\mathbb{Z})\}$

و $\bar{2}=\{x\in\mathbb{Z}/x=7k+2\quad(k\in\mathbb{Z})\}$ و $\bar{3}=\{x\in\mathbb{Z}/x=7k+3\quad(k\in\mathbb{Z})\}$

و ....و $\bar{6}=\{x\in\mathbb{Z}/x=7k+6\quad(k\in\mathbb{Z})\}$

في $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ لدينا $\overline{532}=\bar{4}$ لأن $532\equiv 4\quad[7]$

$\overline{-36}=\bar{6}$ لأن $-36\equiv 6\quad[7]$

4- انسجام العلاقة " الموافقة بترديد n" مع الجمع والضرب

أ- خاصية

ليكن x و y و z و t من $\mathbb{Z}$ و n من $\mathbb{N}$

إذا كان $x\equiv y\quad[n]$ و $z\equiv t\quad[n]$ فان $x+z\equiv y+t\quad[n]$

إذا كان $x\equiv y\quad[n]$ و $z\equiv t\quad[n]$ فان $x\times z\equiv y\times t\quad[n]$

نقول إن العلاقة " الموافقة بترديد n" منسجمة مع الجمع والضرب

ب- نتائج

*- إذا كانت $x\in\bar{r}$ و $x'\in\overline{r'}$ فان $x+x'\in\overline{r+r'}$ و $x\times x'\in\overline{r\times r'}$ نكتب $\overline{r+r'}=\bar{r}+\overline{r'}$

و $\overline{r\times r'}=\bar{r}\times\overline{r'}$

*- $\forall(a;b)\in\mathbb{Z}^2\quad\forall(p;n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}\quad a\equiv b\quad[n]\Rightarrow a^p\equiv b^p\quad[n]$

أمثلة

* في $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ $\quad\bar{3}+\bar{4}=\bar{7}=\bar{2}$ ، $\bar{0}+\bar{1}+\bar{2}+\bar{3}+\bar{4}=\overline{10}=\bar{0}$ ، $\bar{3}\times\bar{4}=\overline{12}=\bar{2}$

تمرين

حدد مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية x حيث في $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ $\quad\bar{x}+\bar{5}=\bar{2}$

تمرين

1- أعط جدول الجمع ثم الضرب في $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

2- بين أن العدد $2^{70}+3^{70}$ قابلة للقسمة على 13

تمرين

1- بين أن $[n]\quad n(n^4-1)\equiv 0\quad\forall n\in\mathbb{N}$

2- بين أن 17 يقسم $3\times5^{2n-1}+2^{3n-2}$ لكل n من $\mathbb{N}^*$

3- ليكن n من $\mathbb{N}$ ، حدد بواقي القسمة الاقليدية للأعداد $1^n+2^n+3^n+4^n$ على4

IV- القاسم المشترك الأكبر

نرمز لمجموعة قواسم العدد الصحيح النسبي a بالرمز D_a

1- تعريف

ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$

القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو أكبر قاسم مشترك موجب قطعا لـ a و b يرمز له

بـ $a\wedge b$

$$\delta=a\wedge b\Leftrightarrow\begin{cases}\delta\in D_a\cap D_b\\ \forall x\in D_a\cap D_b\qquad x\leq\delta\end{cases}$$

2- خاصيات

ليكن a و b و c من $\mathbb{Z}^*$

$$a\wedge b=b\wedge a$$
$$(a\wedge b)\wedge c=a\wedge(b\wedge c)$$
$$a\wedge a=|a|$$

مثال $48\wedge 60=12$

3- خوارزمية اقليدس أو طريقة " القسمات المتتالية " لتحديد القاسم المشترك

أ- ملاحظة

* $\forall a\in\mathbb{Z}^*\quad D_a=D_{-a}$

* $\forall(a;b)\in\mathbb{Z}^{*2}\quad a\wedge b=|a|\wedge|b|$ ومنه تحديد القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين نسبيين يرجع إلى تحديد القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين طبيعيين.

ب- ليكن a و b من $\mathbb{N}^*$

- إذا كان b/a فان $a\wedge b=b$
- إذا كان b لا يقسم a فانه يوجد زوج وحيد $(q;r)$ من $\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$ حيث $a=bq+r$ و $0\prec r\prec b$

بما أن $r=a-bq$ فان كل قاسم مشترك لـ a و b يقسم r

و بالتالي كل قاسم مشترك لـ a و b هو قاسم مشترك لـ b و r أي $D_a\cap D_b\subset D_r\cap D_b$

عكسيا كل قاسم مشترك لـ b و r يقسم a (لأن $a=bq+r$)

ومنه كل قاسم مشترك لـ b و r هو قاسم مشترك لـ a و b أي $D_r\cap D_b\subset D_a\cap D_b$

إذن $D_a\cap D_b=D_r\cap D_b$ و بالتالي $a\wedge b=r\wedge b$

تمهيدة

ليكن a و b من $\mathbb{N}^*$ بحيث b لا يقسم a و r باقي القسمة الاقليدية لـ a على b

$$a\wedge b=r\wedge b$$

ج- ليكن a و b من $\mathbb{N}^*$ نفترض أن $b\prec a$

بإجراء القسمة الاقليدية لـ a على b نحصل على $a=bq_1+r_1$ حيث $0\le r_1\prec b$

- ❖ إذا كان $r_1=0$ فان b/a و منه $a\wedge b=b$
- ❖ اذا كان $r_1\succ 0$ نجري القسمة الاقليدية لـ b على r_1 و نحصل على $b=r_1q_2+r_2$ و $0\le r_1\prec r_2$

اذا كان $r_2=0$ فان $b\wedge r_1=r_1$ و منه $a\wedge b=b\wedge r_1=r_1$

إذا كان $r_2\succ 0$ نجري القسمة الاقليدية لـ r_1 على r_2 و نحصل على $r_1=r_2q_3+r_3$ و $0\le r_3\prec r_2$

....

بإجراء العملية n مرة نحصل على

$$a=bq_1+r_1 \;،\; 0\prec r_1\prec b \;،\; a\wedge b=b\wedge r_1$$
$$b=r_1q_2+r_2 \;،\; 0\prec r_2\prec r_1 \;،\; b\wedge r_1=r_1\wedge r_2$$
$$r_1=r_2q_3+r_3 \;،\; 0\prec r_3\prec r_2 \;،\; r_1\wedge r_2=r_2\wedge r_3$$
$$\vdots$$
$$r_{n-2}=r_{n-1}q_n+r_n \;،\; 0\prec r_n\prec r_{n-1} \;،\; r_{n-2}\wedge r_{n-1}=r_{n-1}\wedge r_n$$

و منه نستنتج $a\wedge b=b\wedge r_1=r_1\wedge r_2=r_2\wedge r_3=............=r_{n-2}\wedge r_{n-1}=r_{n-1}\wedge r_n$ ،

$0\prec r_n\prec r_{n-1}.......\prec r_3\prec r_2\prec r_1\prec b$

نضع $A=\{r_1;r_2;r_3........r_n;.....\}$

A جزء من $\mathbb{N}$ مكبور بالعدد b و منه A مجموعة منتهية

إذن $r_p\ne 0\quad;\quad r_{p+1}=0\quad \exists p\in\mathbb{N}/$

بما أن $r_{p+1}=0$ فان $r_{p-1}=r_p q_{p+1}$ و منه $r_{p-1}\wedge r_p=r_b$

إذن $a\wedge b=r_p$

نتيجة

ليكن a و b من $\mathbb{N}^*$
القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو اخر باقي غير منعدم في طريقة القسمات المتتالية لـ a على b

مثال باستعمال طريقة القسمات المتتالية، نحدد القاسم المشترك الأكبر للعددين 1640 و 156

$$1640=156\times 10+80$$
$$156=80\times 1+76$$
$$80=76\times 1+4$$
$$76=4\times 19+0$$

إذن $1640\wedge 156=4$

3- خاصيات

أ- مبرهنة

ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$ و $\delta=a\wedge b$
يوجد عددان u و v من $\mathbb{Z}$ خيث $\delta=au+bv$

البرهان

ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$ و $\delta=a\wedge b$

نعتبر $A=\left\{n\in\mathbb{N}^*/n=au+bv\quad;\quad (u;v)\in\mathbb{Z}^2\right\}$

لدينا $A\neq\emptyset$ لأن $a^2+b^2\in A$

$A\subset\mathbb{N}$ و بالتالي $\exists p\in A\quad \forall x\in A\quad x\geq p$

ليكن $p=au_0+bv_0$ نبرهن أن $\delta=p$

- ❖ بما أن δ/a و δ/b فان δ/p و منه $\delta\leq p$
- ❖ بإنجاز القسمة لـ a على p نحصل على $\exists(q;r)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\quad a=pq+r\quad;\quad 0\leq r\prec p$
- ❖ ومنه $r=a-q(au_0+bv_0)=a(1-qu_0)+b(-qv_0)$

إذا كان $r\succ 0$ فان $r\in A$ و منه $r\geq p$ و هذا يتناقض مع كون $r\prec p$

و بالتالي $r=0$ أي p/a وبنفس الطريقة نبرهن أن p/b

ومنه p قاسم مشترك لـ a و b وبالتالي $\delta\geq p$

لدينا $\delta\leq p$ و $\delta\geq p$ إذن $\delta=p$

ب- استنتاجات

* من البرهان السابق نستنتج $\delta=a\wedge b$ هو أصغر عدد موجب قطعا من المجموعة
$B=\left\{n\in\mathbb{Z}^*/n=au+bv\quad;\quad (u;v)\in\mathbb{Z}^2\right\}$

* بما أن δ قاسم مشترك لـ a و b فان أي قاسم لـ δ يقسم a و b

عكسيا اذا كان c قاسم مشترك لـ a و b فان $b=k_2c\quad;\quad a=k_1c\qquad \exists(k_1;k_2)\in\mathbb{Z}^2$

بما أن $\delta=a\wedge b$ فانه $\delta=au+bv\qquad \exists(u;v)\in\mathbb{Z}^2/$

ومنه $\delta=(k_1u+k_2v)c$ أي c يقسم δ

مبرهنة

ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$ و $\delta=a\wedge b$
مجموعة قواسم δ هي مجموعة القواسم المشتركة لـ a و b $\qquad(\quad D_a\cap D_b=D_\delta\quad)$

نتيجة

إذا كان a و b و c أعداد من $\mathbb{Z}$ فان
$a\wedge b=\delta\Rightarrow ca\wedge cb=|c|\delta$

4- القاسم المشترك الأكبر لعدة أعداد

تعريف

a_1 و a_2 وa_3.....و a_k أعداد من $\mathbb{Z}^*$
أكبر عدد صحيح طبيعي يقسم في آن واحد a_1 و a_2 وa_3.....و a_k يسمى القاسم المشترك الأكبر لـa_1 و a_2 وa_3.....و a_k

مثال $12 \wedge -18 \wedge 15 = 3$

نتيجة

إذا كان δ هو القاسم المشترك الأكبر لـa_1 و a_2 وa_3.....و a_k فانه توجد اعداد α_1 و α_2 وα_3..... و α_k من $\mathbb{Z}$ حيث $\sum_{i=1}^{i=k} \alpha_i a_i$

V- الأعداد الأولية فيما بينها

1- تعريف

ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$
نقول a و b أوليان فيما بينهما إذا كان $a \wedge b = 1$

2- مبرهنة Bezout

ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$
اذا كان $a \wedge b = 1$ فانه $au + bv = 1 \quad \exists (u;v) \in \mathbb{Z}^2 /$
عكسيا: ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$ حيث $au + bv = 1 \quad \exists (u;v) \in \mathbb{Z}^2 /$
ومنه كل قاسم مشترك لـ a و b يقسم 1 و بالتالي $D_a \cap D_b = \{-1;1\}$ أي $a \wedge b = 1$

مبرهنة Bezout

ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$
$$a \wedge b = 1 \Leftrightarrow \exists (u;v) \in \mathbb{Z}^2 / \quad au + bv = 1$$

3- نتيجة

ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$ و d قاسم مشترك لـ a و b
$$a \wedge b = |d| \Leftrightarrow \frac{a}{|d|} \wedge \frac{b}{|d|} = 1$$

ملاحظة

اذا كان a و b من $\mathbb{Z}^*$ و $a \wedge b = \delta$ فان يوجد p و q من $\mathbb{Z}^*$
حيث $b = q\delta \quad ; \quad a = \delta p \quad ; \quad p \wedge q = 1$

4- مبرهنة كوص Théorème de GAUSS

أ- مبرهنة

ليكن a و b و c من $\mathbb{Z}^*$
إذا كان c يقسم الجداء ab و كان $a \wedge c = 1$ فان c يقسم b

البرهان

ليكن a و b و c من $\mathbb{Z}^*$ حيث c/ab و $a \wedge c = 1$
ومنه $ab = kc \quad ; \quad au + cv = 1 \quad \exists (u;v;k) \in \mathbb{Z} /$
و بالتالي $b = b \times 1 = b(au + cv) = bau + bcv = kcu + bcv = c(ku + bv)$
اذن c يقسم b

ب- استنتاجات

a - مبرهنة

ليكن a و b و c من $\mathbb{Z}^*$
$$a \wedge b = 1 \quad et \quad a/c \quad et \quad b/c \Rightarrow ab/c$$

مثال يكون x قابل للقسمة على 6 اذا كان قابل للقسمة على 2 و 3

ملاحظة

الشرط $a \wedge b = 1$ ضروري

مثال 36 يقبل القسمة على 4 2 و 6 ،و لا يقبل القسمة على $24 = 6 \times 4$

b- مبرهنة

ليكن a و b و c من $\mathbb{Z}^*$ و n من $\mathbb{N}^*$ $\begin{cases} ab \equiv ac \quad [n] \\ a \wedge n = 1 \end{cases} \Rightarrow b \equiv c \quad [n]$

البرهان

$$ab \equiv ac \quad [n] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad ab - ac = kn$$

$$\Leftrightarrow n / a(b-c)$$

و حيث أن $a \wedge n = 1$ فان $n/(b-c)$ اذن $b \equiv c \quad [n]$

5- خاصيات

*- ليكن a و b و c من $\mathbb{Z}^*$	$\begin{cases} a \wedge b = 1 \\ a \wedge c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a \wedge bc = 1$
*- ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$ و n من $\mathbb{N}^*$	$a \wedge b = 1 \Leftrightarrow a \wedge b^n = 1$
*- ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$ و n و m من $\mathbb{N}^*$	$a \wedge b = 1 \Leftrightarrow a^m \wedge b^n = 1$

نتيجة

ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$ إذا كان $a \wedge b = 1$ فان $x = au + bv \quad \exists (u;v) \in \mathbb{Z}^2 \quad \forall x \in \mathbb{Z}$

تمرين محلول

تمرين حدد الأعداد الصحيحة النسبية حيث $17x + 3y = 94$

الحل

الطريقة1

لدينا $17 \times 2 + 3 \times 20 = 94$ و $17x + 3y = 94$ ومنه $17(x-2) + 3(y-20) = 0$

أي $-17(x-2) = 3(y-20)$

ومنه $3/17(x-2)$ و حيث أن $17 \wedge 3 = 1$ فان $3/(x-2)$ أي $x - 2 = 3k \quad \exists k \in \mathbb{Z}$

وبالتالي $x = 3k + 2 \quad \exists k \in \mathbb{Z}$

ومنه $17(3k+2) + 3y = 94 \quad \exists k \in \mathbb{Z}$ و بالتالي $y = -17k + 20 \quad \exists k \in \mathbb{Z}$

إذن $S = \{(3k+2; -17k+20) / k \in \mathbb{Z}\}$

الطريقة2

$$17x + 3y = 94 \Leftrightarrow 17x - 94 = 3y$$

$$\Leftrightarrow 17x \equiv 94 \quad [3]$$

$$\Leftrightarrow 2x \equiv 1 \quad [3]$$

$$\Leftrightarrow -x \equiv 1 \quad [3]$$

$$\Leftrightarrow -x \equiv -(-1) \quad [3]$$

بما أن $-1 \wedge 3 = 1$ فان $x = -1 \quad [3]$ ومنه $x = 3k - 1 \quad \exists k \in \mathbb{Z}$

و بالتالي $y = 17k + 37 \quad \exists k \in \mathbb{Z}$

إذن $S = \{(3k-1; 17k+37) / k \in \mathbb{Z}\}$

تمرين

حدد الأعداد q و u_0 من المجموعة $\mathbb{N}^*$ بحيث $u_0 \wedge q = 1$ و الأعداد u_0 و u_1 و u_2 و u_3 حدود المتتالية الهندسية التي أساسها q و تحقق $u_1 + 2u_3 = 44u_0^2$

تمرين

بين إذا كان $a \wedge b = 1$ فان $(a+b) \wedge b = 1$ و $(a+b) \wedge ab = 1$

استنتج أن $\dfrac{2n+3}{n^2+3n+2}$ غير قابلة للاختزال

تمرين

بين أن العدد $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ عدد لاجدري

6- الأعداد الأولية فيما بينها في مجموعها

تعريف

نقول إن الأعداد a_1 و a_2 و a_3......وa_n من $\mathbb{Z}^*$ أولية فيما بينها في مجموعها إذا كان القاسم المشترك الأكبر لهذه الأعداد هو 1

ملاحظة

عندما نقول إن الأعداد a_1 و a_2 و a_3......وa_n من $\mathbb{Z}^*$ أولية فيما بينها في مجموعها هذا لا يعني أولية فيما بينها مثنى مثنى

مبرهنة

نقول إن الأعداد a_1 و a_2 و a_3......وa_n من $\mathbb{Z}^*$ أولية فيما بينها في مجموعها إذا وفقط وجدت أعداد u_1 و u_2 و u_3......وu_n من $\mathbb{Z}^*$ حيث $\sum_{i=1}^{n} u_1 a_i = 1$

حل المعادلة $ax + by = c$ $\quad (x;y) \in \mathbb{Z}^2$

أ- مثال

نحل في $\mathbb{Z}^2$ $\quad 1075x + 64y = 9$

نطبق خوارزمية اقليدس لتحديد $1075 \wedge 64$

$$1075 = 64 \times 16 + 51$$
$$64 = 51 \times 1 + 13$$
$$51 = 13 \times 3 + 12$$
$$13 = 12 \times 1 + 1$$
$$12 = 12 \times 1 + 0$$

ومنه $1075 \wedge 64 = 1$

ومنه يوجد $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حيث $1075x + 64y = 9$

لنضع $a = 1075$ $\qquad b = 64$

من خوارزمية اقليدس نستنتج أن

$$51 = a - 16b$$
$$13 = b - (a - 16b)$$
$$12 = a - 16b - 3(b - (a - 16b))$$
$$1 = b - (a - 16b) - (a - 16b - 3(b - (a - 16b)))$$
$$1 = -5a + 84b$$

و منه $9 = -45a + 756b$ أي $9 = -45 \times 1075 + 756 \times 64$

و منه $(-45;756)$ حل للمعادلة $1075x + 64y = 9$ و بالتالي $1075(x+45) + 64(y-756) = 0$

و بالتالي $64/1075(x+45)$ و حيث أن $1075 \wedge 64 = 1$ فان $64/(x+45)$

إذن $\exists k \in \mathbb{Z} \quad x+45=64k$ أي $\exists k \in \mathbb{Z} \quad x=64k-45$ و منه $\exists k \in \mathbb{Z} \quad y=1075k+756$

عكسيا إذا كان $x=64k-45 \quad ; \quad y=1075k+756$ فانهما يحققان المعادلة $1075x+64y=9$

إذن $S=\{(64k-45;1075k+756)/k \in \mathbb{Z}\}$

ب – الحالة العامة

نعتبر المعادلة $ax+by=c \quad (x;y) \in \mathbb{Z}^2 \quad (E)$ حيث $a \neq 0$ و $b \neq 0$

نضع $\delta = a \wedge b$ ومنه $a' \wedge b' = 1 \quad \exists (a';b') \in \mathbb{Z}^{*2} / \quad a=\delta a' \quad et \quad b=\delta b'$

* إذا كان δ / c فان المعادلة تصبح $a'x+b'y=c'$ بوضع $c=\delta c'$

بما أن $1=a' \wedge b'$ فانه يوجد $(u_0;v_0)$ من $\mathbb{Z}^{*2}$ حيث $a'u_0+b'v_0=c'$ أي المعادلة $a'x+b'y=c'$ تقبل حلا

* عكسيا إذا كان للمعادلة $ax+by=c$ في $\mathbb{Z}^2$ ليكن $(x_0;y_0)$ حلا للمعادلة أي $ax_0+by_0=c$

ومنه $\delta(a'x_0+b'y_0)=c$ إذن δ / c

خاصية

ليكن $(a;b)$ من $\mathbb{Z}^2$ و $\delta = a \wedge b$ للمعادلة $ax+by=c$ حلول في $\mathbb{Z}^2$ إذا وفقط إذا كان δ / c

حل المعادلة $ax+by=c$

لنفترض أن δ / c إذن حل المعادلة يرجع إلى حل المعادلة $a'x+b'y=c'$

بما أن $1=a' \wedge b'$ فانه يوجد $(u_0;v_0)$ حيث $a'x+b'y=1$ أي $a'c'u_0+b'c'v_0=c'$

ومنه $a'(x-c'u_0)+b'(y-c'v_0)=0$ و بالتالي $a'(x-c'u_0)=-b'(y-c'v_0)$

و بالتالي $a' / b'(c'v_0-y)$ و حيث أن $1=a' \wedge b'$ فان $a' / (c'v_0-y)$

اذن $y=-a'k+c'v_0$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ ومنه نستنتج أن $x=kb'+c'u_0$

عكسيا نتأكد أن $(kb'+c'u_0;-a'k+c'v_0)$ هو حل للمعادلة $a'x+b'y=c'$

إذن $\{(kb'+c'u_0;-a'k+c'v_0)/k \in \mathbb{Z}\}$

تمرين

حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $7x-3y=1$

ليكن a من $\mathbb{N}$ بحيث باقي القسمة الاقليدية لـ a على 7 و 3 على التوالي1 و 2

حدد باقي القسمة الاقليدية لـ a على35

VI- المضاعف المشترك الأصغر

1- تعريف

ليكن $(a;b) \in \mathbb{Z}^{*2}$ المضاعف المشترك الأصغر لـ a و b هو أصغر مضاعف مشترك موجب لـ a و b نرمز له بـ $a \vee b$

2- خاصيات

أ- *- ليكن a و b و c من $\mathbb{Z}^*$ $a \vee b = b \vee a$ $(a \vee b)\|c\| = ac \vee bc$ $a \wedge a = \|a\|$ $b/a \Leftrightarrow a \vee b = \|a\|$ ب- *- ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$ و $a \vee b = m$ كل مضاعف مشترك لـ a و b هو مضاعف للعدد m

ج- مبرهنة

ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$ و $a \vee b = m$ و $a \wedge b = \delta$ $m\delta = \|ab\|$

نتيجة

ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$

$a \wedge b = 1 \Leftrightarrow a \vee b = |ab|$

3- المضاعف المشترك لعدة أعداد

تعريف

a_1 و a_2 وa_3 .....و a_k أعداد من $\mathbb{Z}^*$

أصغر مضاعف مشترك موجب للأعداد a_1 و a_2 وa_3 .....و a_k يسمى المضاعف المشترك الأصغر لـ a_1 و a_2 وa_3 .....و a_k

VII- الأعداد الأولية

1- تعاريف

أ- القواسم الفعلية لعدد صحيح نسبي

تعريف

ليكن $a \in \mathbb{Z}$

نقول إن العدد d قاسم فعلي للعدد a إذا و فقط إذا كان d يقسم a و $d \notin \{-1;1;-a;a\}$

أمثلة

*- القواسم الفعلية للعدد 6 هي 2 و -2 و 3 و -3

*- لدينا $D_7 = \{1;-1;7;-7\}$ العدد 7 لا يقبل قواسم فعلية

ب- الأعداد الأولية

تعريف

ليكن $a \in \mathbb{Z}$

نقول إن العدد a أولي إذا و فقط إذا كان a يخالف 1 و -1 و ليس له قواسم فعلية

a أولي $\Leftrightarrow$ $D_a = \{1;-1;a;-a\}$ و $|a| \neq 1$

نرمز لمجموعة الأعداد الأولية بـ P

2- خاصيات

أ- إذا كان p و q عددين أوليين و $|q| \neq |p|$ فانهما أوليين فيما بينهما (العكس غير صحيح)

ب- إذا كان p أولي فانه أولي مع أي عدد a من $\mathbb{Z}$ بحيث p لا يقسم a

ج- ليكن a عددا غير أولي في $\mathbb{Z}^*$ و يخالف1 و -1 .

أصغر قاسم فعلي موجب للعدد a هو عدد أولي

د- مجموعة الأعداد الأولية غير منتهية

البرهان

نبرهن أن مجموعة الأعداد الأولية غير منتهية

لتكن P^+ مجموعة الأعداد الأولية الموجبة

$P^+ \neq \varnothing$ لأن $2 \in P^+$

لنفترض أن P^+ منتهية و ليكن p أكبر عنصر من P^+ . لنعتبر $m = p!+1$ لدينا $m \succ p$

و منه $m \notin P^+$ أي m ليس أوليا و بالتالي للعدد m قاسم أولي q ومنه $q \in P^+$ و $q \leq p$

$q \leq p$ يستلزم q يقسم $p!$ لأن(q أحد عوامل $p!$)

لدينا q/m و $q/p!$ ومن $q/(m-p!)$ أي $q/1$ وهذا يتناقض مع كون q أولي

ومنه P^+ غير منتهية إذن P غير منتهية

3- طريقة عملية لتحديد الأعداد الأولية

مبرهنة

ليكن $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$

إذا كان n غير أولي فانه يوجد عدد أولي موجب p يقسم n و $p^2 \leq n$

البرهان

ليكن $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$ و n غير أولي و ليكن p أصغر قاسم فعلي موجب لـ n إذن p أولي ومنه يوجد k من $\mathbb{N}^*$ حيث $n = pk$

بما أن $1 \prec p \prec n$ فان $1 \prec k \prec kp = n$ إذن k قاسم فعلي موجب للعدد n و بالتالي $p \leq k$

إذن $p^2 \leq pk = n$

ملاحظة

ليكن $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$

لتأكد من أن n هل أولي أم لا. نرى هل يقبل القسمة على أحد الأعداد الأولية p حيث $p^2 \leq n$

- فإذا كان يقبل القسمة على أحدهم فان n غير أولي
- و إذا كان لا يقبل القسمة على أي واحد مهن فان n عدد أولي

(عمليا نتوقف عندما تكون $p^2 \succ n$)

مثال العدد 179 لا يقبل القسمة على أي عدد من الأعداد الأولية التالية 2 و 3 و 5 و7 و 11 و 13

$17^2 = 289 \quad ; \quad 13^2 = 169$

4- خاصيات

خاصية

*- إذا كان عدد أولي يقسم جداء أعداد صحيحة نسبية فانه يقسم أحد عوامل هذا الجداء

البرهان

ليكن p عددا أوليا و$a = a_1 \times a_2 \times ...... \times a_n$ جداء n من الأعداد الصحيحة النسبية

نفترض أن p/a نبين $p/a_i \quad \exists i \in \{1;2;.....;n\}/$

من أجل $n=2$ لدينا $p/a_1 \times a_2$. إذا كان p/a_1 فان ذلك هو المطلوب

إذا كان p لا يقسم a_1 فان $a_1 \wedge p = 1$ وحيث $p/a_1 \times a_2$ فان حسب GAUSS p/a_2

لنفرض أن الخاصية صحيحة بالنسبة لـ n لنبرء صحتها بالنسبة لـ $n+1$

ليكن $b = a_1 \times a_2 \times ...... \times a_n \times a_{n+1}$ بحيث p/b

إذا كان p/a_{n+1} فان ذلك هو المطلوب

إذا كان p لا يقسم a_{n+1} فان $a_{n+1} \wedge p = 1$ وحيث p/b فان حسب GAUSS $p/a_1 \times a_2 \times ... \times a_n$

ومنه $p/a_i \quad \exists i \in \{1;2;.....;n\}/$

نتيجة

لتكن p_1 و p_2 ......وp_n أعداد أولية موجبة و p عددا أوليا

$p/p_1 \times p_2 \times ...... \times p_n \Rightarrow \exists i \in \{1;2;....;n\} \quad p = p_i$

5- التفكيك الى جداء من عوامل أولية

1- مبرهنة

كل عدد صحيح نسبي n غير منعدم ومخالف لـ1 و 1- يمكن كتابته بكيفية وحيدة على شكل

$n = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times ...... \times p_k^{\alpha_k}$ حيث p_1 و p_2 ......وp_n أعداد أولية مختلفة مثنى مثنى و α_1

و α_2......وα_n أعداد صحيحة طبيعية غير منعدمة و $\varepsilon = \pm 1$

ملاحظة عندما نكتب n على شكل $n = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times ...... \times p_k^{\alpha_k}$ فاننا نقول اننا فككنا n الى جداء عوامل أولية

مثال فكك العدد1752- إلى جداء عوامل أولية

2- تطبيقات

(A) نتيجة1

ليكن $n = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times ...... \times p_k^{\alpha_k}$ حيث p_1 و p_2 ......وp_n أعداد أولية

يكون عدد d قاسما للعدد n اذا وفقط اذا كان تفكيك d الى عوامل جداء أولية على شكل

$d = \varepsilon p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times ...... \times p_k^{\beta_k}$

حيث $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ لكل i من $\{1;2;....;k\}$

نتيجة2

ليكن $n = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times ...... \times p_k^{\alpha_k}$ حيث p_1 و p_2 ......وp_n أعداد أولية

يكون عدد m مضاعفا للعدد n إذا وفقط إذا كان تفكيك m إلى عوامل جداء أولية على شكل

$$d=\varepsilon p_1^{\lambda_1}\times p_2^{\lambda_2}\times\ldots\ldots\times p_k^{\lambda_k}$$
حيث $0\le\alpha_i\le\lambda_i$ لكل i من $\{1;2;\ldots.;k\}$

(B) القاسم المشترك الأكبر – المضاعف المشترك الأصغر

+ القاسم المشترك الأكبر

نتيجة

ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$ حيث $a=\varepsilon p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times\ldots\ldots\times p_k^{\alpha_k}$ و $b=\varepsilon p_1^{\beta_1}\times p_2^{\beta_2}\times\ldots\ldots\times p_k^{\beta_k}$

وحيث p_1 و p_2 ......و p_n أعداد أولية

القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو العدد $\delta=p_1^{\lambda_1}\times p_2^{\lambda_2}\times\ldots\ldots\times p_k^{\lambda_k}$

حيث $\lambda_i=\inf(\alpha_i;\beta_i)$ و i تنتمي $\{1;2;\ldots.;k\}$

+ المضاعف المشترك الأصغر

نتيجة

ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$ حيث $a=\varepsilon p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times\ldots\ldots\times p_k^{\alpha_k}$ و $b=\varepsilon p_1^{\beta_1}\times p_2^{\beta_2}\times\ldots\ldots\times p_k^{\beta_k}$ وحيث p_1

p_2 ......و p_n أعداد أولية

المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b هو العدد $m=p_1^{\lambda_1}\times p_2^{\lambda_2}\times\ldots\ldots\times p_k^{\lambda_k}$

حيث $\lambda_i=\sup(\alpha_i;\beta_i)$ و i تنتمي $\{1;2;\ldots.;k\}$

مثال حدد $-180\wedge 1170$ و $-180\vee 1170$

تمرين

ليكن $n\in\mathbb{N}$ و p عددا أوليا في $\mathbb{N}$

1- بين أن $\forall d\in\mathbb{N}\quad p/d\Rightarrow\left[\exists m\in\mathbb{N}\quad\exists d'\in\mathbb{N}\quad d=p^m d'\quad p\wedge d'=1\right]$

2- برهن أن $\forall q\in\mathbb{N}^*-\{1\}\quad q/p^m\Leftrightarrow\left[\exists k\in\{1;2;\ldots.;n\}\quad q=p^k\right]$ و استنتج عدد قواسم p^n

3- ليكن $a=p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times\ldots\ldots\times p_n^{\alpha_n}$ تفكيك للعدد الصحيح الطبيعي a إلى جداء من عوامل أولية

و $\varphi(a)$ عدد قواسم a

بين أن $\varphi(a)=(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots..(1+\alpha_n)$ و استنتج عدد قواسم عدد صحيح نسبي

VIII- نظمات العد

1- نشاط تمهيدي

1- بين أن $\forall(m;n)\in\mathbb{N}^2\quad m\ge 1\Rightarrow m^n\ge 1+n(m-1)$

2- استنتج أن $\forall m\in\mathbb{N}\quad m\succ 1\Rightarrow\forall p\in\mathbb{N}\quad\exists n\in\mathbb{N}\quad m^n\succ p$

3- بين أن $\forall b\in\mathbb{N}\quad b\succ 1\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N}\quad\exists!k\in\mathbb{N}\quad b^k\le n\prec b^{k+1}$

1- نبين أن $\forall(m;n)\in\mathbb{N}^2\quad m\ge 1\Rightarrow m^n\ge 1+n(m-1)$

ليكن $(m;n)\in\mathbb{N}^2$ لدينا $m^n=((m-1)+1)^n=\sum_{i=0}^{i=n}C_n^i(m-1)^i=1+n(m-1)+\sum_{i=2}^{i=n}C_n^i(m-1)^i$

و حيث أن $m-1\ge 0$ فان $m^n\ge 1+n(m-1)$

2- نستنتج أن $\forall m\in\mathbb{N}\quad m\succ 1\Rightarrow\forall p\in\mathbb{N}\quad\exists n\in\mathbb{N}\quad m^n\succ p$

ليكن $m\in\mathbb{N}$ حيث $m\succ 1$

إذا و جدت n فان $m^n\ge 1+n(m-1)$

ليكن $p\in\mathbb{N}$

حسب أرخميدس يوجد n من $\mathbb{N}$ حيث $n(m-1)\succ p-1$ أي $1+n(m-1)\succ p$ إذن $m^n\succ p$

3- نبين أن $\forall b\in\mathbb{N}\quad b\succ 1\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N}\quad\exists!k\in\mathbb{N}\quad b^k\le n\prec b^{k+1}$

نعتبر $A_n = \left\{ k \in \mathbb{Z} / n \prec b^{k+1} \right\}$

حسب (2) $b^{k_n+1} \succ b^{k_n} \succ n \quad \exists k_n \in \mathbb{N} \quad b \succ 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall b \in \mathbb{N}$ إذن $A_n \neq \varnothing$

$A_n \subset \mathbb{N}$ و منه A_n يقبل أصغر عنصر k_{n_0} أي أن $b^{k_{n_0}} \leq n \prec b^{k_{n_0}+1}$

لأن لو كان $b^{k_{n_0}} \succ n$ و $n \geq 2$ فان $b^{k_{n_0}} \geq 2 \succ 1$ ومنه $k_{n_0} \geq 1$ و بالتالي $k_{n_0} - 1 \geq 0$

وحيث $b^{(k_{n_0}-1)+1} \succ n$ فان $k_{n_0} - 1 \in A_n$ وهذا يتناقض مع كون k_{n_0} أصغر عنصر لـA_n

لو أن $n = 1$ فان $k_{n_0} = 0$ $\qquad \left(b^0 \leq 1 \leq b^{0+1} \right)$

2- تعريف

أساس نظمة عد هو عدد الأرقام التي تستعمل لتمثيل الأعداد الصحيحة الطبيعية

أمثلة

- أساس نظمة العد العشري هو 10. الأرقام المستعملة هي 0 و 1 و 2 و3 و 4 و 5 و 6 و 7 و 8 و9
- أساس نظمة العد الاثنائي هو 2. الأرقام المستعملة هي 0 و 1
- أساس نظمة العد الاثنى عشري هو 12. الأرقام المستعملة هي 0 و 1 و 2 و3 و 4 و 5 و 6 و 7 و 8 و9 و 10 و 11 نرمز في الكتابة لرقم10 بـ α و لـ11 بـ β
- أساس نظمة العد الثماني هو 8. الأرقام المستعملة هي 0 و 1 و 2 و3 و 4 و 5 و 6 و 7

3- نظمة العد ذات الأساس b . $(b \succ 1)$

أ- تمهيدة1

ليكن b عددا صحيحا طبيعيا حيث $(b \succ 1)$

لكل عدد صحيح طبيعي n يوجد k و r_k و q_k في $\mathbb{N}$ حيث $n = b^k q_k + r_k$ و $0 \leq r_k \prec b^k$ و $0 \leq q_k \prec b$

البرهان

ليكن $(b;n) \in \mathbb{N}^2$ حيث $(b \succ 1)$

إذا كان $n = 0$ فان نتيجة بديهية

إذا كان $n \in \mathbb{N}^*$ فانه حسب النشاط التمهيدي $\exists! k \in \mathbb{N} \quad b^k \leq n \prec b^{k+1}$

بإجراء القسمة الاقليدية للعدد n على b^k نحصل على $n = b^k q_k + r_k$ و $0 \leq r_k \prec b^k$ و $q_k \in \mathbb{N}$

لنبين أن $0 \leq q_k \prec b$

إذا كان $q_k \geq b$ ومنه $q_k b^k \geq b^{k+1}$ و بالتالي $n = b^k q_k + r_k \geq b^{k+1}$ و هذا يتناقض مع كون $n \prec b^{k+1}$

إذن $0 \leq q_k \prec b$

ب- حسب التمهيدة1 لدينا $n = b^k q_k + r_k$ و $0 \leq r_k \prec b^k$ و $0 \leq q_k \prec b$

بتطبيق التمهيدة على r_k نحصل على $r_k = b^{k-1} q_{k-1} + r_{k-1}$ و $0 \leq r_{k-1} \prec b^{k-1}$ و $0 \leq q_{k-1} \prec b$ (لأن $r_k \prec b^k$)

نطبق التمهيدة على r_{k-1} وهكذا حت نصل الى r_1 فنحصل على

$$r_{k-1} = b^{k-2} q_{k-2} + r_{k-2} \text{ و } 0 \leq r_{k-2} \prec b^{k-2} \text{ و } 0 \leq q_{k-2} \prec b$$

$$\vdots$$

$$r_2 = b q_1 + r_1 \text{ و } 0 \leq r_1 \prec b \text{ و } 0 \leq q_1 \prec b$$

$$r_1 = 1 \times q_0 \text{ و } q_0 = r_1$$

بجمع جميع أطراف المتساويات نحصل على الكتابة في شكلها الوحيد $n = \sum_{i=0}^{i=k} q_i b^i$

حيث $0 \leq q_i \prec b$ و i تنتمي $\{1; 2; \ldots; k\}$

تمهيدة2

ليكن b عددا صحيحا طبيعيا حيث $(b \succ 1)$

لكل عدد صحيح طبيعي n يوجد عدد صحيح طبيعي k حيث $n = \sum_{i=0}^{i=k} q_i b^i$ بحيث $0 \leq q_i \prec b$

وi تنتمي $\{1;2;....;k\}$ و $q_k \succ 0$ اذا كان $n \succ 0$

ملاحظة

الكتابة $n = \sum_{i=0}^{i=k} q_i b^i$ حيث $0 \leq q_i \prec b$ و i تنتمي $\{1;2;....;k\}$ تبين أنه لتمثيل عدد صحيح طبيعي n في نظمة العد ذات الأساس b

نحتاج الى b رمز و نمثل العدد n في نظمة العد ذات الأساس b بكتابة $n = \overline{q_k q_{k-1} ....q_0}_{(b)}$

أمثلة

* في نظمة العد العشري كتابة العدد2703 هي $2703 = 2 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 0 \times 10 + 3$

* في نظمة العد الثنائي كتابة العددين 8 و 15 هي

$8 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2 + 0$ أي أن العدد 8 ممثل في نظم العد الاثنائي بـ$\overline{1000}$

$15 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1$ أي أن العدد 15 ممثل في نظم العد الاثنائي بـ$\overline{1111}$

* في نظمة العد الثماني

$15 = 1 \times 8 + 7$ ومنه $15 = \overline{17}_{(8)}$

$131 = 2 \times 8^2 + 0 \times 8 + 3$ ومنه $131 = \overline{203}_{(8)}$

ج- طريقة عملية لإيجاد تمثيل عدد صحيح طبيعي في نظمة عد ما

ليكن $b \in \mathbb{N}$; $b \succ 1$ $n \in \mathbb{N}$

لدينا

$$n = bq_1 + r_0 \quad ; \quad 0 \leq r_0 \prec b$$
$$q_1 = bq_2 + r_1 \quad ; \quad 0 \leq r_1 \prec b$$
$$. \qquad .$$
$$q_k = bq_{k+1} + r_k \quad ; \quad 0 \leq r_k \prec b$$
$$n \geq q_1 \geq q_2 \geq ..... \geq q_q$$

بما أن المجموعة $A = \{q_1; q_2....\}$ مكبورة في $\mathbb{N}$ وغير فارغة فانه يوجد k بحيث $q_k = r_k$

ومنه

$$n = bq_1 + r_0 \quad ; \quad 0 \leq r_0 \prec b$$
$$q_1 = bq_2 + r_1 \quad ; \quad 0 \leq r_1 \prec b$$
$$. \qquad .$$
$$q_{k-1} = bq_k + r_{k-1} \quad ; \quad 0 \leq r_{k-1} \prec b$$
$$q_k = r_k$$

و بضرب طرفي المتساوية رقم i بالعدد b^i نحصل على

$$n = bq_1 + r_0$$
$$bq_1 = b^2 q_2 + br_1$$
$$. \qquad .$$
$$b^i q_i = b^{i+1} q_{i+1} + b^i r_i$$

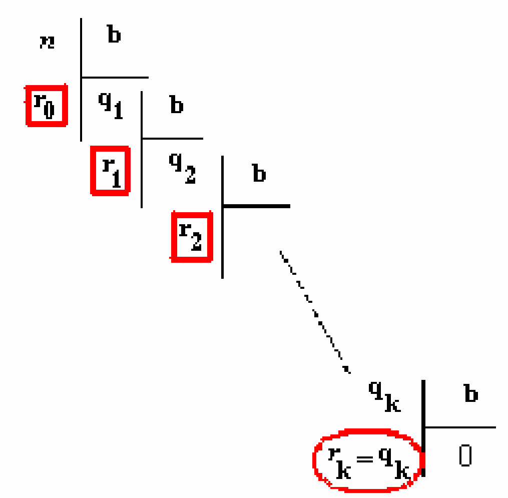
$$b^{k-1}q_{k-1} = b^k q_k + b^{k-1} r_{k-1}$$

$$b^k q_k = b^k r_k$$

بجمع أطراف المتساويات نحصل على $n = \sum_{i=0}^{i=k} b^i r_i$ $\quad$ $i \in \{1;2;....;k\}$ و $0 \le r_i \prec b$

إذا كان $r_k \neq 0$ فان $n = \overline{r_k r_{k-1}......r_1 r_0}$

طريقة عملية



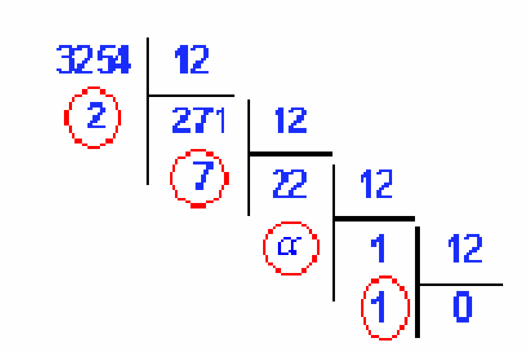
لتحديد تمثيل للعدد n في نظمة العد ذات الأساس b

نحسب البواقي r_i $\quad (0 \le i \le k)$

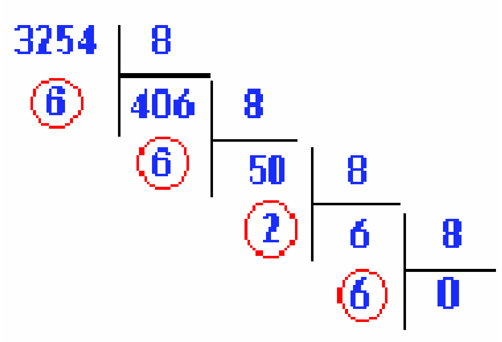
$$n = \overline{r_k r_{k-1}......r_1 r_0}_{(b)}$$

مثال

لنبحث عن تمثيل للعدد 3254 في نظمة العد الثماني ثم نظمة العد الاثنا عشري



$3254 = \overline{1\alpha72}_{(12)}$



$3254 = \overline{6266}_{(8)}$

4- مقارنة عددين ممثلين في نفس النظمة

خاصية

ليكن x و y ممثلين في نفس نظمة العد بـ $x = \overline{a_n a_{n-1}.....a_0}_{(b)}$ و $y = \overline{c_m c_{m-1}......c_0}_{(b)}$

إذا كان $n \succ m$ فان $x \succ y$

خاصية

ليكن x و y ممثلين في نفس نظمة العد بـ $x = \overline{a_n a_{n-1}.....a_0}_{(b)}$ و $y = \overline{c_n c_{n-1}......c_0}_{(b)}$

إذا كان $c_n = a_n \quad c_{n-1} = a_{n-1}.......c_{i+1} = a_{i+1} \quad et \quad a_i \neq c_i$ فان ترتيب x و y هو نفس ترتيب a_i و c_i

5- تغيير أساس نظمة عد

لتمثيل عدد x في نظمة عد ذات الأساس b نمثله أولا في نظمة العد العشري و نحدد تمثيله في نظمة عد ذات الأساس b

تمرين

$\overline{xxx} \times \overline{xxx} = \overline{yyyyyy}$ حيث b $\quad$ هل توجد نظمة العد ذات الأساس

6- مصاديق قابلية القسمة على بعض الأعداد في نظمة العد العشري

ليكن x عدد صحيح طبيعي كتابته في نظمة العدد العشري هي $x=\overline{a_n a_{n-1}.....a_1 a_0}$

$$x \equiv 0 \quad [4] \Leftrightarrow 4 / \overline{a_1 a_0}$$

$$x \equiv 0 \quad [5] \Leftrightarrow a_0 = 0 \quad ou \quad a_1 = 5$$

$$x \equiv 0 \quad [5] \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \in \{00;25;50;75\}$$

$$x \equiv 0 \quad [3] \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{i=n} a_i \equiv 0 \quad [3]$$

$$x \equiv 0 \quad [9] \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{i=n} a_i \equiv 0 \quad [9]$$

$$x \equiv 0 \quad [11] \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i \, a_i \equiv 0 \quad [11]$$