الحسابيات

تذكير :

- مبرهنة

ليكن a من $\mathbb{Z}$ و b في $\mathbb{N}^*$ حيث $a\neq b$

يوجد زوج وحيد $(q;r)$ من $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ حيث $a=bq+r$ حيث $0\le r\prec b$

- خاصيات

* ليكن a و b و c من $\mathbb{Z}^*$

$$a\wedge b=b\wedge a \qquad (a\wedge b)\wedge c=a\wedge(b\wedge c) \qquad a\wedge a=|a|$$

$$a\wedge b=\delta\Rightarrow ca\wedge cb=|c|\delta$$

$$a\vee b=b\vee a \qquad (a\vee b)|c|=ac\vee bc \qquad a\wedge a=|a|$$

$$b/a\Leftrightarrow a\vee b=|a|$$

$$a\wedge b=1\Leftrightarrow a\vee b=|ab|$$

* ليكن a و b من $\mathbb{N}^*$ بحيث b لا يقسم a و r باقي القسمة الاقليدية لـ a على b $\qquad a\wedge b=r\wedge b$

-* ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$ و $a\vee b=m$ كل مضاعف مشترك لـ a و b هو مضاعف للعدد m

- مبرهنة

ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$ و $\delta=a\wedge b$

يوجد عددان u و v من $\mathbb{Z}$ حيث $\delta=au+bv$

- مبرهنة

ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$ و $a\vee b=m$ و $a\wedge b=\delta$

$m\delta=|ab|$

- مبرهنة

ليكن $n\in\mathbb{N}$ و $n\ge 2$

إذا كان n غير أولي فانه يوجد عدد أولي موجب p يقسم n و $p^2\le n$

- خاصيات

-* إذا كان عدد أولي يقسم جداء أعداد صحيحة نسبية فانه يقسم أحد عوامل هذا الجداء

-* لتكن p_1 و p_2 ......و p_n أعداد أولية موجبة و p عددا أوليا

$$p/p_1\times p_2\times\ldots\ldots\times p_n\Rightarrow\exists i\in\{1;2;\ldots.;n\}\quad p=p_i$$

- مبرهنة

كل عدد صحيح نسبي n غير منعدم ومخالف لـ 1 و -1 يمكن كتابته بكيفية وحيدة على شكل

$n=\varepsilon p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times\ldots\ldots\times p_k^{\alpha_k}$ حيث p_1 و p_2 ......و p_n أعداد أولية مختلفة مثنى مثنى و α_1

و α_2 ......و α_n أعداد صحيحة طبيعية غير منعدمة و $\varepsilon=\pm1$

نتيجة

ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$ حيث $a=\varepsilon p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times\ldots\ldots\times p_k^{\alpha_k}$ و $b=\varepsilon p_1^{\beta_1}\times p_2^{\beta_2}\times\ldots\ldots\times p_k^{\beta_k}$

وحيث p_1 و p_2 ......و p_n أعداد أولية

* القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو العدد $\delta=p_1^{\lambda_1}\times p_2^{\lambda_2}\times\ldots\ldots\times p_k^{\lambda_k}$

حيث $\lambda_i=\inf(\alpha_i;\beta_i)$ و i تنتمي $\{1;2;\ldots.;k\}$

* المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b هو العدد $m=p_1^{\lambda_1}\times p_2^{\lambda_2}\times\ldots\ldots\times p_k^{\lambda_k}$

حيث $\lambda_i=\sup(\alpha_i;\beta_i)$ و i تنتمي $\{1;2;\ldots.;k\}$

I- الموافقة بترديدn

1- تعريف

ليكن a و b من $\mathbb{Z}$ و n من $\mathbb{N}$

نقول إن a يوافق b بترديد n و نكتب $[n]$ $a \equiv b$ إذا كان n يقسم $a-b$

$$\forall(a;b)\in\mathbb{Z}^2 \quad a\equiv b \quad [n] \Leftrightarrow n/a-b \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z} \quad a-b=kn$$

2- خاصيات العلاقة " الموافقة بترديد n"

أ- $[n]$ $\forall a\in\mathbb{Z} \quad a\equiv a$ نقول إن العلاقة " الموافقة بترديد n" انعاكسية

ب- $\forall(a;b)\in\mathbb{Z} \quad a\equiv b \quad [n]\Rightarrow b\equiv a \quad [n]$ نقول إن العلاقة " الموافقة بترديد n" تماثلية

ج- $\forall(a;b)\in\mathbb{Z} \quad (a\equiv b \quad [n]) et (b\equiv c \quad [n])\Rightarrow a\equiv c \quad [n]$ نقول إن العلاقة " الموافقة بترديد n" متعدية

نلخص الخاصيات أ و ب و ج بقولنا إن العلاقة " الموافقة بترديد n" علاقة تكافؤ

د- خاصية

ليكن a و b من $\mathbb{Z}$ و n من $\mathbb{N}$

$[n]$ $a\equiv b$ تكافئ a و b لهما نفس باقي القسمة الاقليدية على n

البرهان

ليكن a و b من $\mathbb{Z}$ و n من $\mathbb{N}$ بحيث $a=nq_1+r_1$ و $b=nq_2+r_2$ مع $0\le r_1 \prec n$ و $0\le r_2\prec n$

- ❖ إذا كان a و b لهما نفس باقي القسمة الاقليدية على n أي $r_1=r_2$ فان $a-b=n(q_1-q_2)$

  أي أن $[n]$ $a\equiv b$
- ❖ عكسيا إذا كان $[n]$ $a\equiv b$ فانه يوجد k من $\mathbb{Z}$ حيث $a-b=nk$

  و منه $r_1-r_2=(k-q_1-q_2)n$ أي n يقسم r_1-r_2

  و لدينا $0\le r_1\prec n$ و $0\le r_2\prec n$ ومنه $|r_1-r_2|\prec n$

  و بالتالي $r_1-r_2=0$ أي $r_1=r_2$

3- المجموعة $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

* - $\forall(a;n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N} \quad \exists(q;r)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N} \quad a=nq+r \quad et \quad 0\le r\prec n$

- $\forall(a;n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N} \quad \exists r\in\mathbb{N} \quad a\equiv r \quad [n] \quad et \quad r\in\{0;1;.....;n-1\}$

- المجموعة $\{x\in\mathbb{Z}/x\equiv r \quad [n]\}$ هي مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية التي لها نفس الباقي r في القسمة الاقليدية على n نرمز لها بـ $\overline{r}$

المجموعة $\overline{r}$ تسمى صنف تكافؤ r بالنسبة للعلاقة " الموافقة بترديد n"في $\mathbb{Z}$

- $x\in\overline{r}\Leftrightarrow x\equiv r \quad [n]$

* - $\forall a\in\mathbb{Z} \quad \exists r\in\{0;1;....;n-1\}/ \quad a\equiv r \quad [n]$ أي $\forall a\in\mathbb{Z} \quad \exists r\in\{0;1;....;n-1\}/ \quad \overline{a}=\overline{r}$

* - إذا كان $\overline{r}=\overline{r'}$ و $0\le r\prec n$ و $0\le r'\prec n$ فان $r=r'$

* - $\forall(x;n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N} \quad \exists r\in\{0;1;..;n-1\}/ \quad x\in\overline{r}$ (r باقي القسمة الاقليدية على n)

اذن $\mathbb{Z}=\overline{0}\cup\overline{1}\cup\overline{2}\cup....\cup\overline{(n-1)}$

المجموعة $\{\overline{0};\overline{1};.....;\overline{n-1}\}$ برمز لها بالرمز $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

عناصر $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ منفصلة مثنى مثنى

أمثلة

* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}=\{\overline{0};\overline{1}\}$ حيث $\overline{0}=2\cdot\mathbb{Z}$ و $\overline{1}=\{x\in\mathbb{Z}/x=2k+1 \quad (k\in\mathbb{Z})\}$

* $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}=\{\overline{0};\overline{1};\overline{2};\overline{3};\overline{4};\overline{5};\overline{6}\}$ حيث $\overline{0}=7\cdot\mathbb{Z}$ و $\overline{1}=\{x\in\mathbb{Z}/x=7k+1 \quad (k\in\mathbb{Z})\}$

و $\overline{2}=\{x\in\mathbb{Z}/x=7k+2 \quad (k\in\mathbb{Z})\}$ و $\overline{3}=\{x\in\mathbb{Z}/x=7k+3 \quad (k\in\mathbb{Z})\}$

و ....و $\overline{6}=\{x\in\mathbb{Z}/x=7k+6 \quad (k\in\mathbb{Z})\}$

في $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ لدينا $\overline{532}=\overline{4}$ لأن $532\equiv 4 \quad [7]$

$\overline{-36}=\overline{6}$ لأن $-36\equiv 6 \quad [7]$

4- انسجام العلاقة " الموافقة بترديد n" مع الجمع والضرب

أ- خاصية

ليكن x و y و z و t من $\mathbb{Z}$ و n من $\mathbb{N}$

إذا كان $x\equiv y \quad [n]$ و $z\equiv t \quad [n]$ فان $x+z\equiv y+t \quad [n]$

إذا كان $x\equiv y \quad [n]$ و $z\equiv t \quad [n]$ فان $x\times z\equiv y\times t \quad [n]$

نقول إن العلاقة " الموافقة بترديد n" منسجمة مع الجمع والضرب

ب- نتائج

*- إذا كانت $x\in\overline{r}$ و $x'\in\overline{r'}$ فان $x+x'\in\overline{r+r'}$ و $x\times x'\in\overline{r\times r'}$ نكتب $\overline{r+r'}=\overline{r}+\overline{r'}$

و $\overline{r\times r'}=\overline{r}\times\overline{r'}$

*- $\forall(a;b)\in\mathbb{Z}^2 \quad \forall(p;n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N} \quad a\equiv b \quad [n]\Rightarrow a^p\equiv b^p \quad [n]$

أمثلة

* في $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ $\quad \overline{3}+\overline{4}=\overline{7}=\overline{2}$, $\overline{0}+\overline{1}+\overline{2}+\overline{3}+\overline{4}=\overline{10}=\overline{0}$, $\overline{3}\times\overline{4}=\overline{12}=\overline{2}$

تمرين

حدد مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية x حيث في $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ $\quad \overline{x}+\overline{5}=\overline{2}$

تمرين

1- أعط جدول الجمع ثم الضرب في $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

2- بين أن العدد $2^{70}+3^{70}$ قابلة للقسمة على 13

تمرين

1- بين أن $\forall n\in\mathbb{N} \quad n(n^4-1)\equiv 0 \quad [n]$

2- بين أن 17 يقسم $3\times 5^{2n-1}+2^{3n-2}$ لكل n من $\mathbb{N}^*$

3- ليكن n من $\mathbb{N}$ ، حدد بواقي القسمة الاقليدية للأعداد $1^n+2^n+3^n+4^n$ على4

II- الأعداد الأولية فيما بينها

1- تعريف

a و b من $\mathbb{Z}^*$

نقول a و b أوليان فيما بينهما إذا كان $a\wedge b=1$

2- مبرهنة Bezout

ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$

اذا كان $a\wedge b=1$ فانه $\exists(u;v)\in\mathbb{Z}^2 / \quad au+bv=1$

عكسيا: ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$ حيث $\exists(u;v)\in\mathbb{Z}^2 / \quad au+bv=1$

ومنه كل قاسم مشترك لـ a و b يقسم 1 و بالتالي $D_a\cap D_b=\{-1;1\}$ أي $a\wedge b=1$

مبرهنة Bezout

ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$

$a\wedge b=1\Leftrightarrow\exists(u;v)\in\mathbb{Z}^2 / \quad au+bv=1$

3- نتيجة

ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$ و d قاسم مشترك لـ a و b

$$a\wedge b=|d|\Leftrightarrow\frac{a}{|d|}\wedge\frac{b}{|d|}=1$$

ملاحظة

اذا كان a و b من $\mathbb{Z}^*$ و $a\wedge b=\delta$ فان يوجد p و q من $\mathbb{Z}^*$
حيث $b=q\delta$; $a=\delta p$; $p\wedge q=1$

4- مبرهنة كوص Théorème de GAUSS

أ- مبرهنة

ليكن a و b وc من $\mathbb{Z}^*$
إذا كان c يقسم الجداء ab و كان $a\wedge c=1$ فان c يقسم b

البرهان

ليكن a و b وc من $\mathbb{Z}^*$ حيث c/ab و $a\wedge c=1$

ومنه $ab=kc$; $au+cv=1$ $\exists(u;v;k)\in\mathbb{Z}/$

و بالتالي $b=b\times 1=b(au+cv)=bau+bcv=kcu+bcv=c(ku+bv)$

اذن c يقسم b

ب- استنتاجات

a - مبرهنة

ليكن a و b وc من $\mathbb{Z}^*$
$a\wedge b=1 \quad et \quad a/c \quad et \quad b/c\Rightarrow ab/c$

مثال يكون x قابل للقسمة على 6 اذا كان قابل للقسمة على 2 و 3

ملاحظة

الشرط $a\wedge b=1$ ضروري

مثال 36 يقبل القسمة على 4 2 و 6 ،و لا يقبل القسمة على $6\times 4=24$

b- مبرهنة

ليكن a و b وc من $\mathbb{Z}^*$ و n من $\mathbb{N}^*$

$$\begin{cases} ab\equiv ac \quad [n] \\ a\wedge n=1 \end{cases}\Rightarrow b\equiv c \quad [n]$$

البرهان

$$ab\equiv ac \quad [n]\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z} \quad ab-ac=kn$$
$$\Leftrightarrow n/a(b-c)$$

و حيث أن $a\wedge n=1$ فان $n/(b-c)$ اذن $b\equiv c \quad [n]$

5- خاصيات

*- ليكن a و b و c من $\mathbb{Z}^*$ $\quad \begin{cases} a\wedge b=1 \\ a\wedge c=1 \end{cases}\Leftrightarrow a\wedge bc=1$

*- ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$ و n من $\mathbb{N}^*$ $\quad a\wedge b=1\Leftrightarrow a\wedge b^n=1$

*- ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$ و n و m من $\mathbb{N}^*$ $\quad a\wedge b=1\Leftrightarrow a^m\wedge b^n=1$

نتيجة

ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$
إذا كان $a\wedge b=1$ فان $x=au+bv$ $\quad \exists(u;v)\in\mathbb{Z}^2$ $\quad \forall x\in\mathbb{Z}$

تمرين محلول

تمرين حدد الأعداد الصحيحة النسبية حيث $17x+3y=94$

الحل

الطريقة1

لدينا $17\times 2+3\times 20=94$ و $17x+3y=94$ ومنه $17(x-2)+3(y-20)=0$

أي $-17(x-2)=3(y-20)$

ومنه $3/17(x-2)$ و حيث أن $17\wedge 3=1$ فان $3/(x-2)$ أي $x-2=3k \quad \exists k\in\mathbb{Z}$

وبالتالي $x=3k+2 \quad \exists k\in\mathbb{Z}$

ومنه $17(3k+2)+3y=94 \quad \exists k\in\mathbb{Z}$ و بالتالي $y=-17k+20 \quad \exists k\in\mathbb{Z}$

إذن $S=\{(3k+2;-17k+20)/k\in\mathbb{Z}\}$

الطريقة2

$$\begin{aligned}17x+3y=94 &\Leftrightarrow 17x-94=3y\\ &\Leftrightarrow 17x\equiv 94 \quad [3]\\ &\Leftrightarrow 2x\equiv 1 \quad [3]\\ &\Leftrightarrow -x\equiv 1 \quad [3]\\ &\Leftrightarrow -x\equiv -(-1) \quad [3]\end{aligned}$$

بما أن $-1\wedge 3=1$ فان $x=-1 \quad [3]$ ومنه $x=3k-1 \quad \exists k\in\mathbb{Z}$

و بالتالي $y=17k+37 \quad \exists k\in\mathbb{Z}$

إذن $S=\{(3k-1;17k+37)/k\in\mathbb{Z}\}$

تمرين

حدد الأعداد q و u_0 من المجموعة $\mathbb{N}^*$ بحيث $u_0\wedge q=1$ و الأعداد u_0 و u_1 و u_2 و u_3 حدود المتتالية الهندسية التي أساسها q و تحقق $u_1+2u_3=44u_0^2$

تمرين

بين إذا كان $a\wedge b=1$ فان $(a+b)\wedge b=1$ و $(a+b)\wedge ab=1$

استنتج أن $\dfrac{2n+3}{n^2+3n+2}$ غير قابلة للاختزال

تمرين

بين أن العدد $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ عدد لاجدري

6- مبرهنة فيرما FERMAT

نشاط

ليكن p عددا أوليا

1- بين أن p يقسم C_p^k مهما كان k حيث $1\le k\le p-1$

2- استنتج أن $p\Big|\Big[(n+1)^p-(n^p+1)\Big] \quad \forall n\in\mathbb{N}$

3- أ/ بين بالترجع أن $[p] \quad n^p\equiv n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

ب/ استنتج أن $[p] \quad n^{p-1}\equiv 1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$ بحيث $p\wedge n=1$

4- استنتج أن $[p] \quad a^p\equiv a \quad \forall a\in\mathbb{Z}$ و أن $[p] \quad a^{p-1}\equiv 1 \quad \forall a\in\mathbb{Z}$ بحيث $p\wedge a=1$

الجواب

1- بين أن p يقسم C_p^k

لدينا $C_p^k=\dfrac{p!}{k!(p-k)!} \Rightarrow k!C_p^k=p(p-1)(p-2)......(p-k+1)$

أي p يقسم $k!C_p^k$ و بما أن $k\prec p$ فان عوامل الجداء $k!$ أصغر من p ومنه $p\wedge k!=1$

و حسب مبرهنة كوص فان p يقسم C_p^k

2- نستنتج أن $\forall n\in\mathbb{N} \quad p\left|\left[(n+1)^p-\left(n^p+1\right)\right]\right.$

حسب الصيغة الحدانية لدينا $(n+1)^p=\sum_{i=0}^{p}C_n^i n^i$ أي $(n+1)^p=1+n^p+\sum_{i=1}^{p-1}C_n^i n^i$

ومنه $(n+1)^p-\left(1+n^p\right)=\sum_{i=1}^{p-1}C_n^i n^i$

و حسب السؤال الاول p يقسم C_p^i $1\leq i\prec p$ اذن p يقسم $\sum_{i=1}^{p-1}C_n^i n^i$

ومنه $\forall n\in\mathbb{N} \quad p\left|\left[(n+1)^p-\left(n^p+1\right)\right]\right.$

3- نبين بالترجع أن $\forall n\in\mathbb{N} \quad n^p\equiv n \quad [p]$

من أجل $n=0$ لدينا $o^p\equiv o \quad [p]$

نفترض أن $n^p\equiv n \quad [p]$ و نبين أن $(n+1)^p\equiv n+1 \quad [p]$

لدينا $n^p\equiv n \quad [p] \quad \Rightarrow \quad n^p+1\equiv n+1 \quad [p]$

و حيث أن $\forall n\in\mathbb{N} \quad p\left|\left[(n+1)^p-\left(n^p+1\right)\right]\right.$ فان $(n+1)^p\equiv n^p+1 \quad [p]$

و منه $(n+1)^p\equiv n+1 \quad [p]$

إذن $\forall n\in\mathbb{N} \quad n^p\equiv n \quad [p]$

ب/ نستنتج أن $\forall n\in\mathbb{N} \quad n^{p-1}\equiv 1 \quad [p]$ بحيث $p\wedge n=1$

لدينا $n^p\equiv n \quad [p]$ و $p\wedge n=1$ إذن $n^{p-1}\equiv 1 \quad [p]$

حسب الخاصية التي تقول $\begin{cases} ab\equiv ac \quad [n] \\ a\wedge n=1 \end{cases}\Rightarrow b\equiv c \quad [n]$

4- نستنتج أن $\forall a\in\mathbb{Z} \quad a^p\equiv a \quad [p]$ و أن $\forall a\in\mathbb{Z} \quad a^{p-1}\equiv 1 \quad [p]$ بحيث $p\wedge a=1$

ليكن $a\in\mathbb{Z}$

اذا كان $a\in\mathbb{N}$ فالنتيجة تم برهنتها سابقا

اذا كا ن $a\prec 0$ فان $-a\succ 0$

من أجل $p=2$ لدينا $a^2-a=a(a-1)$ ومنه 2 يقسم a^2-a لان جداء عددين متتاليين زوجي

اذا كان $p\succ 2$ فان p فردي

$(-a)^p\equiv -a \quad [p]$ أي $-\left(a^p\right)\equiv -a \quad [p]$ ومنه $a^p\equiv a \quad [p]$

اذن $\forall a\in\mathbb{Z} \quad a^p\equiv a \quad [p]$

لدينا $a^p\equiv a \quad [p]$ و $p\wedge a=1 \Rightarrow [p] \quad a^{p-1}\equiv 1$

خاصية

ليكن p عددا أوليا

$\forall a\in\mathbb{Z} \quad a^p\equiv a \quad [p]$

مبرهنة فيرما

ليكن p عددا أوليا

$\forall a\in\mathbb{Z} \quad a^{p-1}\equiv 1 \quad [p]$ بحيث $p\wedge a=1$

7- الأعداد الأولية فيما بينها في مجموعها

تعريف

نقول إن الأعداد a_1 و a_2 و a_3......وa_n من $\mathbb{Z}^*$ أولية فيما بينها في مجموعها إذا كان القاسم المشترك الأكبر لهذه الأعداد هو 1

ملاحظة

عندما نقول إن الأعداد a_1 و a_2 و a_3......وa_n من $\mathbb{Z}^*$ أولية فيما بينها في مجموعها هذا لا يعني أولية فيما بينها مثنى مثنى

مبرهنة

نقول إن الأعداد a_1 و a_2 و a_3......وa_n من $\mathbb{Z}^*$ أولية فيما بينها في مجموعها إذا وفقط وجدت أعداد u_1 و u_2 و u_3......وu_n من $\mathbb{Z}^*$ حيث $\sum_{i=1}^{n} u_1 a_i = 1$

حل المعادلة $ax + by = c$ $\quad (x;y) \in \mathbb{Z}^2$

أ- مثال

نحل في $\mathbb{Z}^2$ $\quad 1075x + 64y = 9$

نطبق خوارزمية اقليدس لتحديد $1075 \wedge 64$

$$1075 = 64 \times 16 + 51$$
$$64 = 51 \times 1 + 13$$
$$51 = 13 \times 3 + 12$$
$$13 = 12 \times 1 + 1$$
$$12 = 12 \times 1 + 0$$

ومنه $1075 \wedge 64 = 1$

ومنه يوجد $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حيث $1075x + 64y = 9$

لنضع $a = 1075$ $\qquad b = 64$

من خوارزمية اقليدس نستنتج أن

$$51 = a - 16b$$
$$13 = b - (a - 16b)$$
$$12 = a - 16b - 3(b - (a - 16b))$$
$$1 = b - (a - 16b) - (a - 16b - 3(b - (a - 16b)))$$
$$1 = -5a + 84b$$

و منه $9 = -45a + 756b$ أي $9 = -45 \times 1075 + 756 \times 64$

و منه $(-45;756)$ حل للمعادلة $1075x + 64y = 9$ و بالتالي $1075(x+45) + 64(y-756) = 0$

و بالتالي $64/1075(x+45)$ و حيث أن $1075 \wedge 64 = 1$ فان $64/(x+45)$

إذن $\exists k \in \mathbb{Z} \quad x + 45 = 64k$ أي $\exists k \in \mathbb{Z} \quad x = 64k - 45$ و منه $\exists k \in \mathbb{Z} \quad y = 1075k + 756$

عكسيا إذا كان $x = 64k - 45 \quad ; \quad y = 1075k + 756$ فانهما يحققان المعادلة $1075x + 64y = 9$

إذن $S = \{(64k - 45; 1075k + 756) / k \in \mathbb{Z}\}$

ب – الحالة العامة

نعتبر المعادلة $ax + by = c$ $\quad (x;y) \in \mathbb{Z}^2$ $\quad (E)$ حيث $a \neq 0$ و $b \neq 0$

نضع $\delta = a \wedge b$ ومنه $a' \wedge b' = 1 \quad b = \delta b' \quad et \quad a = \delta a' \quad / \exists (a';b') \in \mathbb{Z}^{*2}$

* إذا كان δ / c فان المعادلة تصبح $a'x + b'y = c'$ بوضع $c = \delta c'$

بما أن $1 = a' \wedge b'$ فانه يوجد $(u_0;v_0)$ من $\mathbb{Z}^{*2}$ حيث $a'u_0 + b'v_0 = c'$ أي المعادلة $a'x + b'y = c'$ تقبل حلا

* عكسيا إذا كان للمعادلة $ax+by=c$ في $\mathbb{Z}^2$ ليكن $(x_0;y_0)$ حلا للمعادلة أي $ax_0+by_0=c$
ومنه $\delta(a'x_0+b'y_0)=c$ إذن δ/c

خاصية

ليكن $(a;b)$ من $\mathbb{Z}^2$ و $\delta=a\wedge b$ للمعادلة $ax+by=c$ حلول في $\mathbb{Z}^2$ إذا وفقط إذا كان δ/c

حل المعادلة $ax+by=c$
لنفترض أن δ/c إذن حل المعادلة يرجع إلى حل المعادلة $a'x+b'y=c'$
بما أن $1=a'\wedge b'$ فانه يوجد $(u_0;v_0)$ حيث $a'x+b'y=1$ أي $a'c'u_0+b'c'v_0=c'$
ومنه $a'(x-c'u_0)+b'(y-c'v_0)=0$ و بالتالي $a'(x-c'u_0)=-b'(y-c'v_0)$
و بالتالي $a'/b'(c'v_0-y)$ و حيث أن $1=a'\wedge b'$ فان $a'/(c'v_0-y)$
اذن $y=-a'k+c'v_0$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ ومنه نستنتج أن $x=kb'+c'u_0$
عكسيا نتأكد أن $(kb'+c'u_0;-a'k+c'v_0)$ هو حل للمعادلة $a'x+b'y=c'$
إذن $\{(kb'+c'u_0;-a'k+c'v_0)/k\in\mathbb{Z}\}$

تمرين

حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $7x-3y=1$
ليكن a من $\mathbb{N}$ بحيث باقي القسمة الاقليدية لـ a على 7 و 3 على التوالي1 و 2
حدد باقي القسمة الاقليدية لـ a على35

III- نظمات العد

1- نشاط تمهيدي

1- بين أن $m\geq 1\Rightarrow m^n\geq 1+n(m-1)$ $\quad\forall(m;n)\in\mathbb{N}^2$ 2- استنتج أن $m^n\succ p$ $\quad\exists n\in\mathbb{N}$ $\quad\forall m\in\mathbb{N}\quad m\succ 1\Rightarrow\forall p\in\mathbb{N}$ 3- بين أن $b^k\leq n\prec b^{k+1}$ $\quad\exists!k\in\mathbb{N}$ $\quad\forall b\in\mathbb{N}\quad b\succ 1\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N}$

1- نبين أن $m\geq 1\Rightarrow m^n\geq 1+n(m-1)$ $\quad\forall(m;n)\in\mathbb{N}^2$
ليكن $(m;n)\in\mathbb{N}^2$ لدينا $m^n=((m-1)+1)^n=\sum_{i=0}^{i=n}C_n^i(m-1)^i=1+n(m-1)+\sum_{i=2}^{i=n}C_n^i(m-1)^i$
و حيث أن $m-1\geq 0$ فان $m^n\geq 1+n(m-1)$
2- نستنتج أن $m^n\succ p$ $\quad\exists n\in\mathbb{N}$ $\quad\forall m\in\mathbb{N}\quad m\succ 1\Rightarrow\forall p\in\mathbb{N}$
ليكن $m\in\mathbb{N}$ حيث $m\succ 1$
إذا و جدت n فان $m^n\geq 1+n(m-1)$
ليكن $p\in\mathbb{N}$
حسب أرخميدس يوجد n من $\mathbb{N}$ حيث $n(m-1)\succ p-1$ أي $1+n(m-1)\succ p$ إذن $m^n\succ p$
3- نبين أن $b^k\leq n\prec b^{k+1}$ $\quad\exists!k\in\mathbb{N}$ $\quad\forall b\in\mathbb{N}\quad b\succ 1\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N}$
نعتبر $A_n=\{k\in\mathbb{Z}/n\prec b^{k+1}\}$
حسب (2) $b^{k_n+1}\succ b^{k_n}\succ n$ $\quad\exists k_n\in\mathbb{N}$ $\quad\forall b\in\mathbb{N}\quad b\succ 1\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N}$ إذن $A_n\neq\varnothing$
$A_n\subset\mathbb{N}$ و منه A_n يقبل أصغر عنصر k_{n_0} أي أن $b^{k_{n_0}}\leq n\prec b^{k_{n_0}+1}$
لأن لو كان $b^{k_{n_0}}\succ n$ و $n\geq 2$ فان $b^{k_{n_0}}\geq 2\succ 1$ ومنه $k_{n_0}\geq 1$ و بالتالي $k_{n_0}-1\geq 0$
وحيث $b^{(k_{n_0}-1)+1}\succ n$ فان $k_{n_0}-1\in A_n$ وهذا يتناقض مع كون k_{n_0} أصغر عنصر لـA_n
لو أن $n=1$ فان $k_{n_0}=0$ $\qquad(b^0\leq 1\leq b^{0+1})$

2- تعريف

أساس نظمة عد هو عدد الأرقام التي تستعمل لتمثيل الأعداد الصحيحة الطبيعية

أمثلة

- أساس نظمة العد العشري هو 10. الأرقام المستعملة هي 0 و 1 و 2 و3 و 4 و 5 و 6 و 7 و 8 و9
- أساس نظمة العد الاثنائي هو 2. الأرقام المستعملة هي 0 و 1
- أساس نظمة العد الاثنى عشري هو 12. الأرقام المستعملة هي 0 و 1 و 2 و3 و 4 و 5 و 6 و 7 و 8 و9 و 10 و 11 نرمز في الكتابة لرقم10 بـ α و لـ11 بـ β
- أساس نظمة العد الثماني هو 8. الأرقام المستعملة هي 0 و 1 و 2 و3 و 4 و 5 و 6 و 7

3- نظمة العد ذات الأساس b . $(b \succ 1)$

أ- تمهيدة1

ليكن b عددا صحيحا طبيعيا حيث $(b \succ 1)$ لكل عدد صحيح طبيعي n يوجد k و r_k و q_k في $\mathbb{N}$ حيث $n = b^k q_k + r_k$ و $0 \le r_k \prec b^k$ و $0 \le q_k \prec b$

البرهان

ليكن $(b;n) \in \mathbb{N}^2$ حيث $(b \succ 1)$

إذا كان $n = 0$ فان نتيجة بديهية

إذا كان $n \in \mathbb{N}^*$ فانه حسب النشاط التمهيدي $\exists! k \in \mathbb{N} \quad b^k \le n \prec b^{k+1}$

بإجراء القسمة الاقليدية للعدد n على b^k نحصل على $n = b^k q_k + r_k$ و $0 \le r_k \prec b^k$ و $q_k \in \mathbb{N}$

لنبين أن $0 \le q_k \prec b$

إذا كان $q_k \ge b$ ومنه $q_k b^k \ge b^{k+1}$ و بالتالي $n = b^k q_k + r_k \ge b^{k+1}$ و هذا يتناقض مع كون $n \prec b^{k+1}$

إذن $0 \le q_k \prec b$

ب- حسب التمهيدة1 لدينا $n = b^k q_k + r_k$ و $0 \le r_k \prec b^k$ و $0 \le q_k \prec b$

بتطبيق التمهيدة على r_k نحصل على $r_k = b^{k-1} q_{k-1} + r_{k-1}$ و $0 \le r_{k-1} \prec b^{k-1}$ و $0 \le q_{k-1} \prec b$ (لأن $r_k \prec b^k$)

نطبق التمهيدة على r_{k-1} وهكذا حت نصل الى r_1 فنحصل على

$$r_{k-1} = b^{k-2} q_{k-2} + r_{k-2} \text{ و } 0 \le r_{k-2} \prec b^{k-2} \text{ و } 0 \le q_{k-2} \prec b$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$r_2 = b q_1 + r_1 \quad \text{و} \quad 0 \le r_1 \prec b \quad \text{و} \quad 0 \le q_1 \prec b$$

$$r_1 = 1 \times q_0 \quad \text{و} \quad q_0 = r_1$$

بجمع جميع أطراف المتساويات نحصل على الكتابة في شكلها الوحيد $n = \sum_{i=0}^{i=k} q_i b^i$

حيث $0 \le q_i \prec b$ و i تنتمي $\{1;2;....;k\}$

تمهيدة2

ليكن b عددا صحيحا طبيعيا حيث $(b \succ 1)$ لكل عدد صحيح طبيعي n يوجد عدد صحيح طبيعي k حيث $n = \sum_{i=0}^{i=k} q_i b^i$ بحيث $0 \le q_i \prec b$ وi تنتمي $\{1;2;....;k\}$ و$q_k \succ 0$ اذا كان $n \succ 0$

ملاحظة

الكتابة $n = \sum_{i=0}^{i=k} q_i b^i$ حيث $0 \le q_i \prec b$ و i تنتمي $\{1;2;....;k\}$ تبين أنه لتمثيل عدد صحيح طبيعي n في نظمة العد ذات الأساس b

نحتاج الى b رمز و نمثل العدد n في نظمة العد ذات الأساس b بكتابة $n=\overline{q_k q_{k-1}..........q_0}_{(b)}$

أمثلة

* في نظمة العد العشري كتابة العدد2703 هي $2703=2\times10^3+7\times10^2+0\times10+3$

* في نظمة العد الثنائي كتابة العددين 8 و 15 هي

$8=1\times2^3+0\times2^2+0\times2+0$ أي أن العدد 8 ممثل في نظم العد الاثنائي بـ$\overline{1000}$

$15=1\times2^3+1\times2^2+1\times2+1$ أي أن العدد 15 ممثل في نظم العد الاثنائي بـ$\overline{1111}$

* في نظمة العد الثماني

$15=1\times8+7$ ومنه $15=\overline{17}_{(8)}$

$131=2\times8^2+0\times8+3$ ومنه $131=\overline{203}_{(8)}$

ج- طريقة عملية لإيجاد تمثيل عدد صحيح طبيعي في نظمة عد ما

ليكن $b\in\mathbb{N}$; $b\succ1$ $n\in\mathbb{N}$

لدينا

$$0\le r_0\prec b \quad ; \quad n=bq_1+r_0$$
$$0\le r_1\prec b \quad ; \quad q_1=bq_2+r_1$$
$$. \qquad\qquad .$$
$$0\le r_k\prec b \quad ; \quad q_k=bq_{k+1}+r_k$$
$$n\ge q_1\ge q_2\ge .....\ge q_q$$

بما أن المجموعة $A=\{q_1;q_2....\}$ مكبورة في $\mathbb{N}$ وغير فارغة فانه يوجد k بحيث $q_k=r_k$

ومنه

$$0\le r_0\prec b \quad ; \quad n=bq_1+r_0$$
$$0\le r_1\prec b \quad ; \quad q_1=bq_2+r_1$$
$$. \qquad\qquad .$$
$$0\le r_{k-1}\prec b \quad ; \quad q_{k-1}=bq_k+r_{k-1}$$
$$q_k=r_k$$

و بضرب طرفي المتساوية رقم i بالعدد b^i نحصل على

$$n=bq_1+r_0$$
$$bq_1=b^2q_2+br_1$$
$$. \qquad .$$
$$b^iq_i=b^{i+1}q_{i+1}+b^ir_i$$
$$. \qquad .$$
$$b^{k-1}q_{k-1}=b^kq_k+b^{k-1}r_{k-1}$$
$$b^kq_k=b^kr_k$$

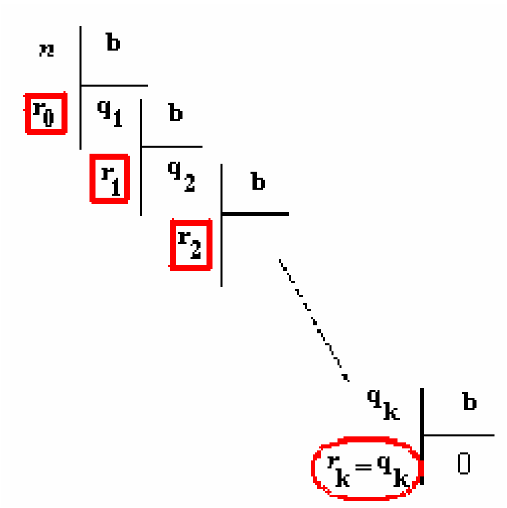
بجمع أطراف المتساويات نحصل على $n=\sum_{i=0}^{i=k}b^ir_i$ $\quad 0\le r_i\prec b$ و $i\in\{1;2;....;k\}$

إذا كان $r_k\ne0$ فان $n=\overline{r_kr_{k-1}......r_1r_0}$

طريقة عملية

لتحديد تمثيل للعدد n في نظمة العد ذات الأساس b

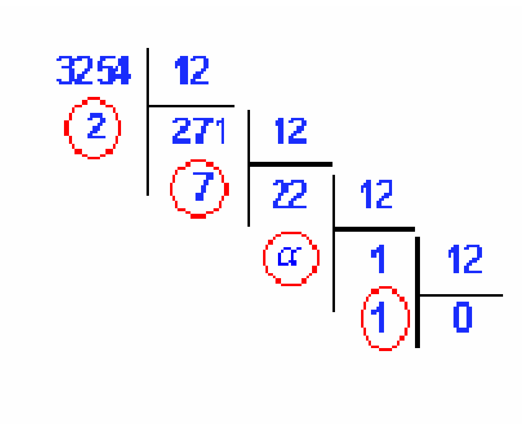
نحسب البواقي r_i $\quad (0\le i\le k)$

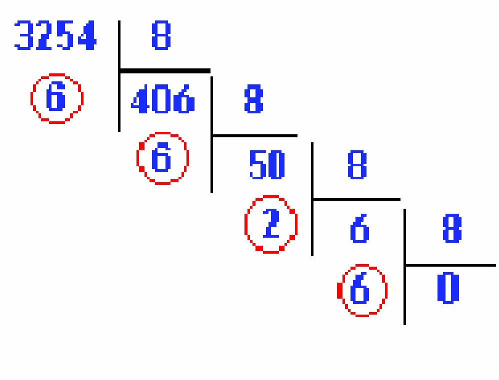


$$n=\overline{r_k r_{k-1}......r_1 r_0}_{(b)}$$

مثال

لنبحث عن تمثيل للعدد 3254 في نظمة العد الثماني ثم نظمة العد الاثنا عشري





$3254=\overline{1\alpha72}_{(12)}$ $\qquad$ $3254=\overline{6266}_{(8)}$

3- مقارنة عددين ممثلين في نفس النظمة

خاصية

ليكن x و y ممثلين في نفس نظمة العد بـ $x=\overline{a_n a_{n-1}.....a_0}_{(b)}$ و $y=\overline{c_m c_{m-1}......c_0}_{(b)}$

إذا كان $n\succ m$ فان $x\succ y$

خاصية

ليكن x و y ممثلين في نفس نظمة العد بـ $x=\overline{a_n a_{n-1}.....a_0}_{(b)}$ و $y=\overline{c_n c_{n-1}......c_0}_{(b)}$

إذا كان $c_n=a_n \quad c_{n-1}=a_{n-1}.......c_{i+1}=a_{i+1} \quad et \quad a_i\neq c_i$ فان ترتيب x و y هو نفس ترتيب a_i و c_i

5- تغيير أساس نظمة عد

لتمثيل عدد x في نظمة عد ذات الأساس b نمثله أولا في نظمة العد العشري و نحدد تمثيله في نظمة عد ذات الأساس b

تمرين

هل توجد نظمة العد ذات الأساس b حيث $\overline{xxx}\times\overline{xxx}=\overline{yyyyyy}$

6- مصاديق قابلية القسمة على بعض الأعداد في نظمة العد العشري

ليكن x عدد صحيح طبيعي كتابته في نظمة العدد العشري هي $x=\overline{a_n a_{n-1}.....a_1 a_0}$

$$x \equiv 0 \quad [4] \Leftrightarrow 4/\overline{a_1 a_0}$$

$$x \equiv 0 \quad [5] \Leftrightarrow a_0 = 0 \quad ou \quad a_1 = 5$$

$$x \equiv 0 \quad [5] \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \in \{00;25;50;75\}$$

$$x \equiv 0 \quad [3] \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{i=n} a_i \equiv 0 \quad [3]$$

$$x \equiv 0 \quad [9] \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{i=n} a_i \equiv 0 \quad [9]$$

$$x \equiv 0 \quad [11] \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i a_i \equiv 0 \quad [11]$$