السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	عموميات حول الدوال العددية	سلسلة 1

تمرين 1 : حدد مجموعة تعريف الدوال التالية :

$$f(x)=\frac{4|x|+3}{x^2+4x+4} \quad ، \quad g(x)=\frac{x^3-5}{2|x-3|-8} \quad ، \quad h(x)=\frac{6+x^4}{x-\frac{1}{x}} \quad ، \quad p(x)=\frac{5-|x|}{|x|+7}$$

$$q(x)=\frac{(5-x)(2-x)}{x^2+x-6} \quad ، \quad k(x)=\frac{5-|x|}{x^2-3x+4} \quad ، \quad t(x)=\frac{5-\sin(x)}{2\sin(x)-1} \quad ، \quad m(x)=\sqrt{3-|x-4|}$$

$$r(x)=\frac{x^2+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x-2}} \quad ، \quad l(x)=\sqrt{x^3-8}+\frac{1-x}{|x+1|-|x-7|}$$

تمرين 2 : ادرس زوجية الدوال التالية :

$$f(x)=\frac{x^3}{|x|+5} \quad ، \quad g(x)=\frac{\cos(x)}{x^4+x^2+1} \quad ، \quad h(x)=\frac{\sin(x)}{x^3-1} \quad ، \quad p(x)=|x|+|x+1|+|x-1|$$

$$q(x)=x^2+x+1 \quad ، \quad k(x)=\frac{\sqrt{|x-2|}+\sqrt{|x+2|}}{x^4-1}$$

تمرين 3 : نعتبر الدالة : $f(x)=\dfrac{2x^2+4x+3}{x^2+2x+2}$

1) بين أن : $x^2+2x+2>0 \quad \forall x\in IR$

2) حدد D_f

3) بين أن $1\leq f(x)<2 \quad \forall x\in IR$

تمرين 4 : أوجد جدول تغيرات الدوال التالية ثم أنشئ تمثيلها المبياني في م.م.م :

$$f(x)=x^2+4x-1 \quad ، \quad g(x)=-2x^2+6x+1 \quad ، \quad h(x)=\frac{3x-1}{x-2} \quad ، \quad k(x)=\frac{x}{x+2}$$

$$p(x)=\sqrt{x-2} \quad ، \quad q(x)=-2x^3 \quad ، \quad m(x)=2|x|+1 \quad ، \quad t(x)=x^2-2|x|-3 \quad ، \quad r(x)=\frac{3x}{|x|+1}$$

تمرين 5 : نعتبر الدالة : $f(x)=x^2+4x+3$

1) أدرس تغيرات الدالة f

2) أنشئ (C_f) منحنى الدالة f في م.م.م.

3) حدد مبيانيا صورة المجال $[-3,0]$

4) أ) تحقق أن : $f(x)=(x+2)^2-1 \quad \forall x\in IR$

ب) حدد جبريا صورة المجال $[-3,0]$

5) حدد مبيانيا $f^{-1}([0,3])$

6) حدد جبريا $f^{-1}([0,3])$

تمرين 1 : لنحدد مجموعة تعريف الدوال التالية :

$$f(x)=\frac{4|x|+3}{x^2+4x+4}$$

$D_f=\{x\in IR \ / \ x^2+4x+4\neq 0\}=\{x\in IR \ / \ (x+2)^2\neq 0\}$

$D_f=\{x\in IR \ / \ x+2\neq 0\}=]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$

$$g(x)=\frac{x^3-5}{2|x-3|-8}$$

$D_g=\{x\in IR \ / \ 2|x-3|-8\neq 0\}$

$D_g=\{x\in IR \ / \ |x-3|\neq 4\}=\{x\in IR \ / \ x-3\neq 4 \text{ et } x-3\neq -4\}$

$D_g=\{x\in IR \ / \ x\neq 7 \text{ et } x\neq -1\}=]-\infty;-1[\cup]-1;7[\cup]7;+\infty[$

$$h(x)=\frac{6+x^4}{x-\frac{1}{x}}$$

$D_h=\left\{x\in IR/ \ x\neq 0 \text{ et } x-\frac{1}{x}\neq 0\right\}=\left\{x\in IR/ \ x\neq 0 \text{ et } \frac{x^2-1}{x}\neq 0\right\}$

$D_h=\{x\in IR \ / \ x\neq 0 \text{ et } (x-1)(x+1)\neq 0\}$

$D_h=\{x\in IR/ \ x\neq 0 \text{ et } x\neq -1 \text{ et } x\neq 1\}$

$D_h=]-\infty;-1[\cup]-1;0[\cup]0;1[\cup]1;+\infty[$

$$p(x)=\frac{5-|x|}{|x|+7}$$

$D_p=\{x\in IR/ \ |x|+7\neq 0\}=IR$ (بما أن : $\forall x\in IR/ \ |x|+7\geq 7>0$)

$$q(x)=\frac{(5-x)(2-x)}{x^2+x-6}$$

$D_q=\{x\in IR/ \ x^2+x-6\neq 0\}$

ولدينا : $\Delta=1+24=25 \Rightarrow x_1=\frac{-1+5}{2}=2$ et $x_2=\frac{-1-5}{2}=-3$

إذن : $D_q=]-\infty;-3[\cup]-3;2[\cup]2;+\infty[$

$$k(x)=\frac{5-|x|}{x^2-3x+4}$$

$D_k=\{x\in IR/ \ x^2-3x+4\neq 0\}$

ولدينا : $\Delta=9-16=-7<0 \Rightarrow \forall x\in IR \ x^2-3x+4>0$ إذن : $D_k=IR$

$$t(x)=\frac{5-\sin(x)}{2\sin(x)-1}$$

$D_t=\{x\in IR/ \ 2\sin(x)-1\neq 0\}=\left\{x\in IR/\sin(x)\neq\frac{1}{2}\right\}=$

$D_t=\left\{x\in IR/\sin(x)\neq\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right\}$

$D_t=\left\{x\in IR/x\neq\frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ et } x\neq\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi/k\in Z\right\}$

$D_t=\left\{x\in IR/x\neq\frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ et } x\neq\frac{5\pi}{6}+2k\pi/k\in Z\right\}$

$D_t=IR_{\setminus\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi/k\in Z\right\}\cup\left\{\frac{5\pi}{6}+2k\pi/k\in Z\right\}}$

$$m(x)=\sqrt{3-|x-4|}$$

$D_m=\{x\in IR/ \ 3-|x-4|\geq 0\}=\{x\in IR/|x-4|\leq 3\}=\{x\in IR/-3\leq x-4\leq 3\}$

$D_m=\{x\in IR/1\leq x\leq 7\}=[1;7]$

$$r(x)=\frac{x^2+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x-2}}$$

$D_r=\{x\in IR/ \ x\geq 0 \text{ et } x^2+x-2\geq 0\}$

لدينا : $\Delta=1+8=9>0$ منه : $x_1=1$ و $x_2=-2$

منه : $\left(x^2+x-2\geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2)\geq 0 \Leftrightarrow x\in]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[\right)$

بالتالي : $D_r=[0;+\infty[\cap]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[=]1;+\infty[$

لحل المتراجحة الثانية قمنا بتحديد جذور الحدودية x^2+x-2 وبعد استعمال جدول الإشارات وجدنا المجموعة:
$]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$ ، ولكون شرط صلاحية التعبير يتضمن العطف "و" فلنتيجة النهائية عبارة عن تقاطع مجالين.

$l(x)=\sqrt{x^3-8}+\dfrac{1-x}{\lvert x+1\rvert-\lvert x-7\rvert}$	$Dl=\{x\in IR/\ \ x^3-8\geq 0\ \text{ et }\ \lvert x+1\rvert-\lvert x-7\rvert\neq 0\}$ $Dl=\{x\in IR/\ \ x^3\geq 8\ \text{ et }\ \lvert x+1\rvert\neq\lvert x-7\rvert\}$ $Dl=\{x\in IR/\ \ x\geq 2\ \text{ et }\ x+1\neq x-7\ \text{ et }\ x+1\neq -x+7\}$ $Dl=\{x\in IR/\ \ x\geq 2\ \text{ et }\ 1\neq -7\ \text{ et }\ x\neq 3\}$ $Dl=\{x\in IR/\ \ x\geq 2\ \text{ et }\ x\neq 3\}=[2;3[\cup]3;+\infty[$

تذكر الخاصية: $x\geq y \Leftrightarrow x^n\geq y^n$ حيث n عدد صحيح طبيعي فردي ،أما إذا كان n زوجيا فالتكافؤ السابق غير صحيح إلا إذا كان x و y موجبان.

تمرين 2 : ادرس زوجية الدوال التالية :

$f(x)=\dfrac{x^3}{\lvert x\rvert+5}$	لدينا: $Df=\{x\in IR/\ \lvert x\rvert+5\neq 0\}=IR$ (لأن: $\forall x\in IR\ \ \lvert x\rvert+5\geq 5>0$) منه: $x\in Df\Rightarrow -x\in Df$ من جهة أخرى ، لدينا: $\forall x\in IR\ \ f(-x)=\dfrac{(-x)^3}{\lvert -x\rvert+5}=\dfrac{-x^3}{\lvert x\rvert+5}=-f(x)$ بالتالي : f دالة فردية.
$g(x)=\dfrac{\cos(x)}{x^4+x^2+1}$	لدينا: $Dg=\{x\in IR/\ \ x^4+x^2+1\neq 0\}=IR$ (لأن: $\forall x\in IR\ \ x^4+x^2+1\geq 1>0$) من جهة أخرى ، لدينا: $\forall x\in IR\ g(-x)=\dfrac{\cos(-x)}{(-x)^4+(-x)^2+1}=\dfrac{\cos(x)}{x^4+x^2+1}=g(x)$ بالتالي : g دالة زوجية.
$h(x)=\dfrac{\sin(x)}{x^3-1}$	$Dh=\{x\in IR/\ \ x^3\neq 1\}=\{x\in IR/\ \ x\neq 1\}=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ بما أن : $-1\in Dr$ و $1\notin Dr$ فإن h ليست دالة زوجية و لا فردية. عدم صحة الشرط $x\in Dh\Rightarrow -x\notin Dh$ ينفي مباشرة زوجية وفردية الدالة.
$p(x)=\lvert x\rvert+\lvert x+1\rvert+\lvert x-1\rvert$	$Dp=IR$ $\forall x\in IR\ \ \ p(-x)=\lvert -x\rvert+\lvert -x+1\rvert+\lvert -x-1\rvert=\lvert x\rvert+\lvert x-1\rvert+\lvert x+1\rvert=p(x)$ بالتالي p دالة زوجية.
$q(x)=x^2+x+1$	$Dq=IR$ لدينا : $q(1)=3$ و $q(-1)=1$ منه : $q(-1)\neq q(1)$ و $q(-1)\neq -q(1)$ بالتالي فإن q ليست دالة زوجية و لا فردية. إثبات عدم زوجية دالة يجب أن يكون باستعمال مثال مضاد ، حيث أن نفي العبارة : $\forall x\in Dq\ \ q(-x)=q(x)$ هو $\exists x\in Dq\ \ q(-x)\neq q(x)$ وهو ما يعني إيجاد مثال يحقق هذه العبارة الأخيرة و نفس الشيء بالنسبة لنفي الفردية.
$k(x)=\dfrac{\sqrt{\lvert x-2\rvert}+\sqrt{\lvert x+2\rvert}}{x^4-1}$	$Dk=\{x\in IR/\ \ x^4-1\neq 0\}=\{x\in IR/\ \ (x-1)(x+1)(x^2+1)\neq 0\}$ $Dk=]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$ منه : $x\in Dk\Rightarrow -x\in Dk$ و $\forall x\in IR\ \ \ k(-x)=k(x)$ بالتالي فإن q دالة زوجية .

تمرين 3 : $f(x)=\dfrac{2x^2+4x+3}{x^2+2x+2}$

1	لدينا: $\forall x\in IR\ \ x^2+2x+2=(x-1)^2+1>0$
2	$Df=\{x\in IR/\ x^2+2x+2\neq 0\}=IR$ (لأن الشرط $x^2+2x+2\neq 0$ محقق لكل عدد حقيقي حسب السؤال السابق)
3	لدينا: $\forall x\in IR\ \ f(x)-1=\dfrac{2x^2+4x+3}{x^2+2x+2}-1=\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}=\dfrac{(x+1)^2}{x^2+2x+2}\geq 0$

و $\forall x\in IR \quad f(x)-2=\frac{2x^2+4x+3}{x^2+2x+2}-2=\frac{-1}{x^2+2x+2}<0$ ، بالتالي: $\boxed{\forall x\in IR \quad 1\leq f(x)<2}$

تمرين اعتيادي و بسيط بالنسبة لشعبة العلوم الرياضية، لكنه من بين التمارين المدرجة للتذكير ببعض القواعد

تمرين 4 :

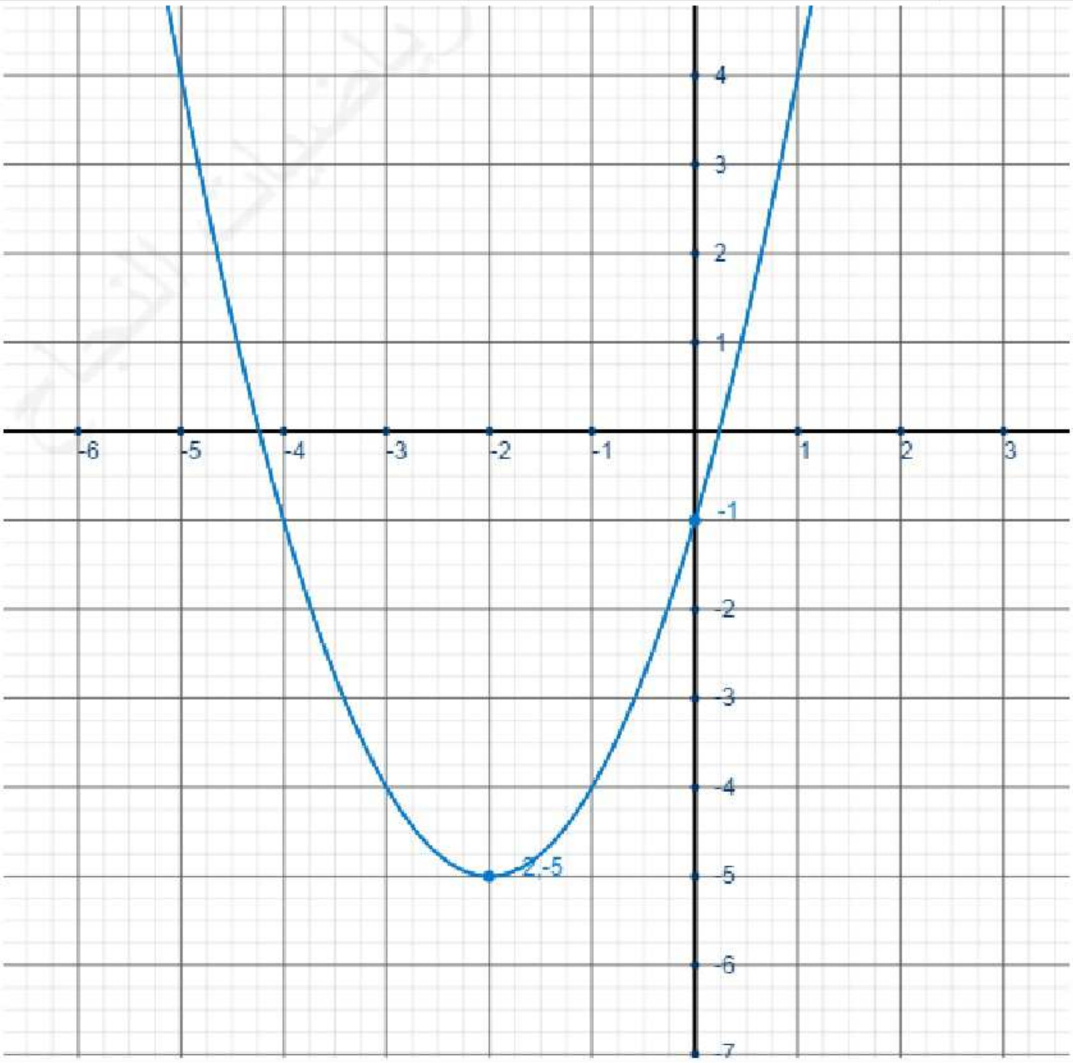
$\boxed{f(x)=x^2+4x-1}$

f عبارة عن دالة حدودية من الدرجة الثانية ، إذن تمثيلها المبياني عبارة عن شلجم رأسه :

$$\frac{-b}{2a}=\frac{-4}{2}=-2$$

إذن :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	↘	-5	↗

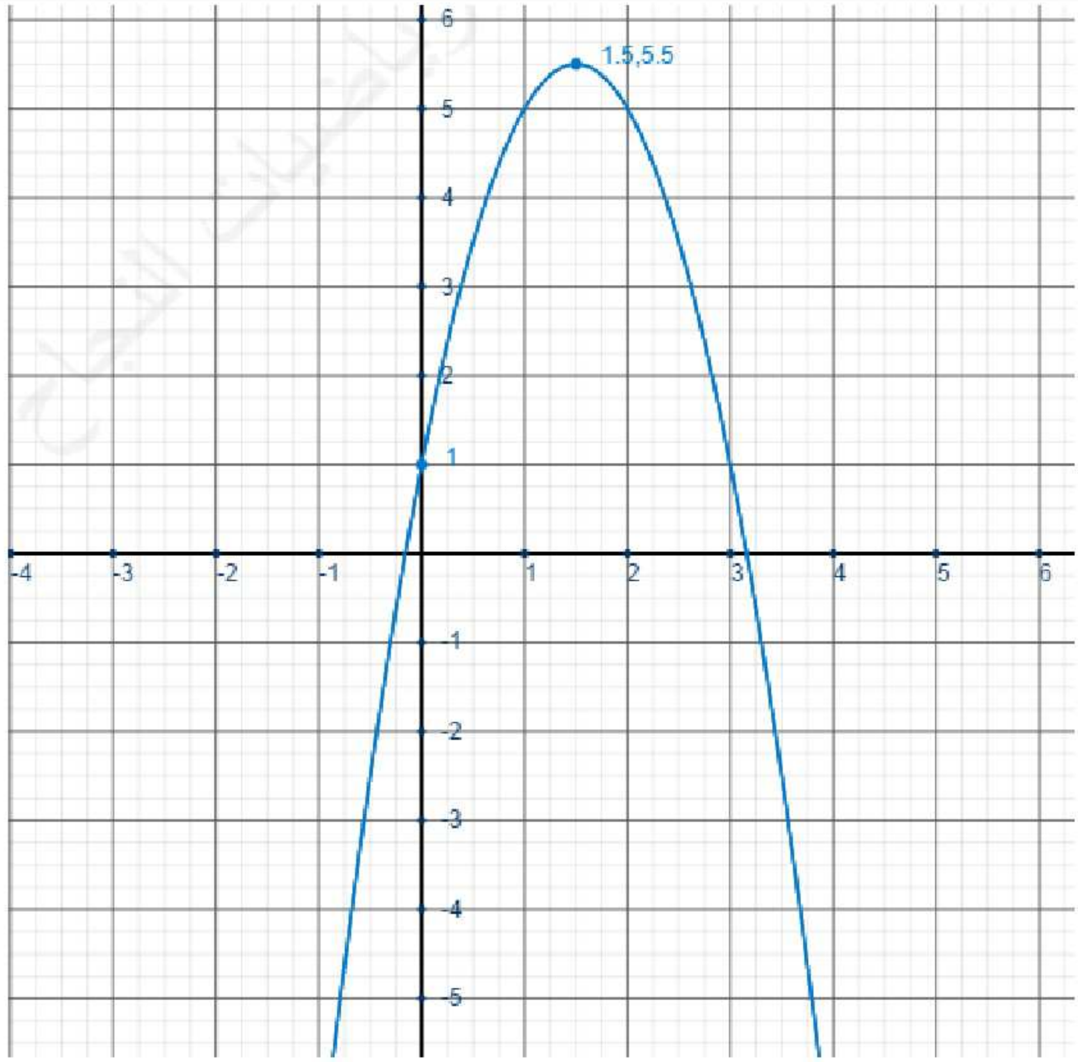


$\boxed{g(x)=-2x^2+6x+1}$

g عبارة عن دالة حدودية من الدرجة الثانية ، إذن تمثيلها المبياني عبارة عن شلجم رأسه : $\frac{-b}{2a}=\frac{-6}{-4}=\frac{3}{2}$

إذن :

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$g(x)$	↗	$\frac{11}{2}$	↘



لاحظ أن رتابة الدالة تعتمد على إشارة المعامل a

$$h(x)=\frac{3x-1}{x-2}$$

h عبارة عن دالة على شكل $\frac{ax+b}{cx+d}$ ، إذن تمثيلها المبياني عبارة عن هذلول:

ولدينا :

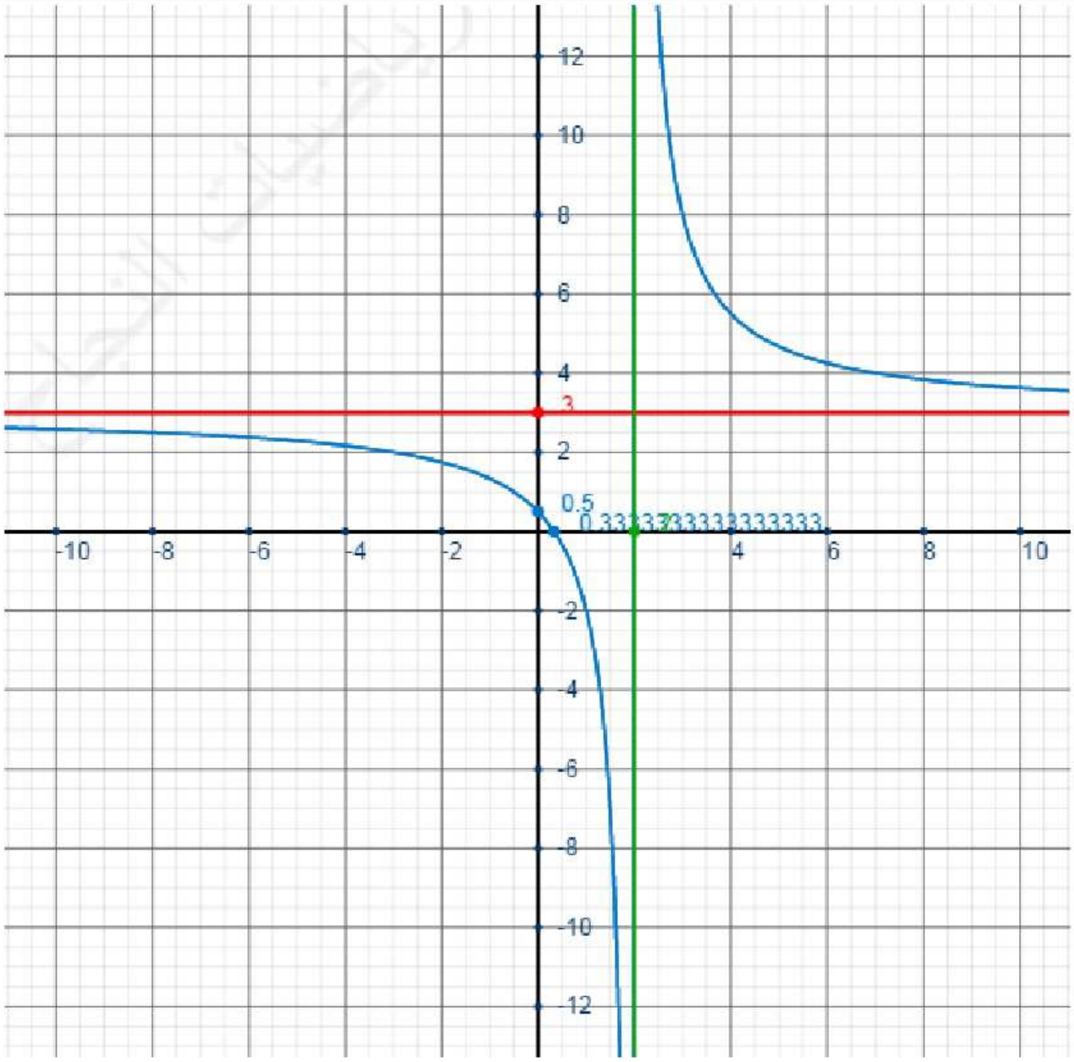
$$h(x)-3=\frac{3x-1}{x-2}-3$$

$$h(x)-3=\frac{3x-1-3x+6}{x-2}$$

$$h(x)-3=\frac{5}{x-2}$$

إذن الهذلول مركزه : $\Omega(2,3)$ وبما أن $5>0$ فالدالة تناقصية

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$h(x)$	↘	‖	↘



$$\boxed{k(x)=\frac{x}{x+2}}$$

k عبارة عن دالة على شكل $\frac{ax+b}{cx+d}$ ، إذن تمثيلها المبياني عبارة عن هذلول:

ولدينا :

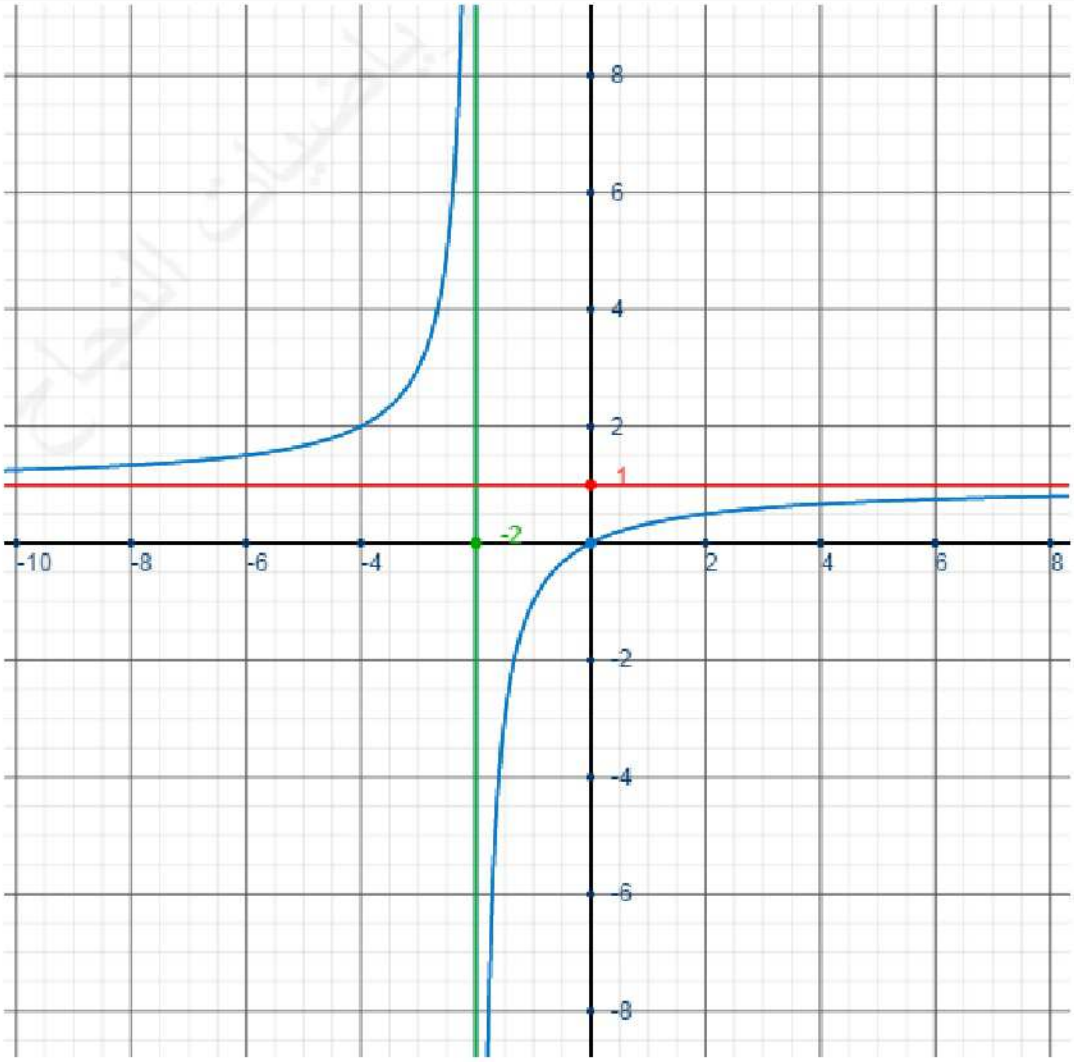
$$k(x)-1=\frac{x}{x+2}-1$$

$$k(x)-1==\frac{x-x-2}{x+2}$$

$$k(x)-1==\frac{-2}{x+2}$$

إذن الهذلول مركزه : $\Omega(-2,1)$ و بما أن $-2<0$ فالدالة تزايدية

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$k(x)$	$\nearrow$	‖	$\nearrow$

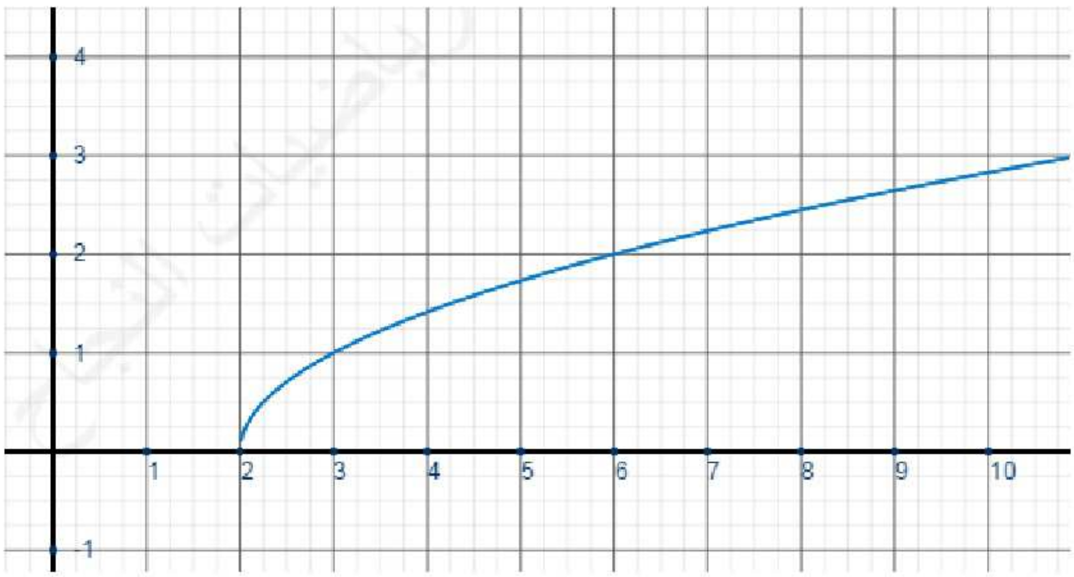


لاحظ أنه لتحديد مركز الهذلول نحسب الفرق $\frac{ax+b}{cx+d}-\frac{a}{c}$

$\boxed{p(x)=\sqrt{x-2}}$

p عبارة عن دالة على شكل $\sqrt{x+a}$، إذن :

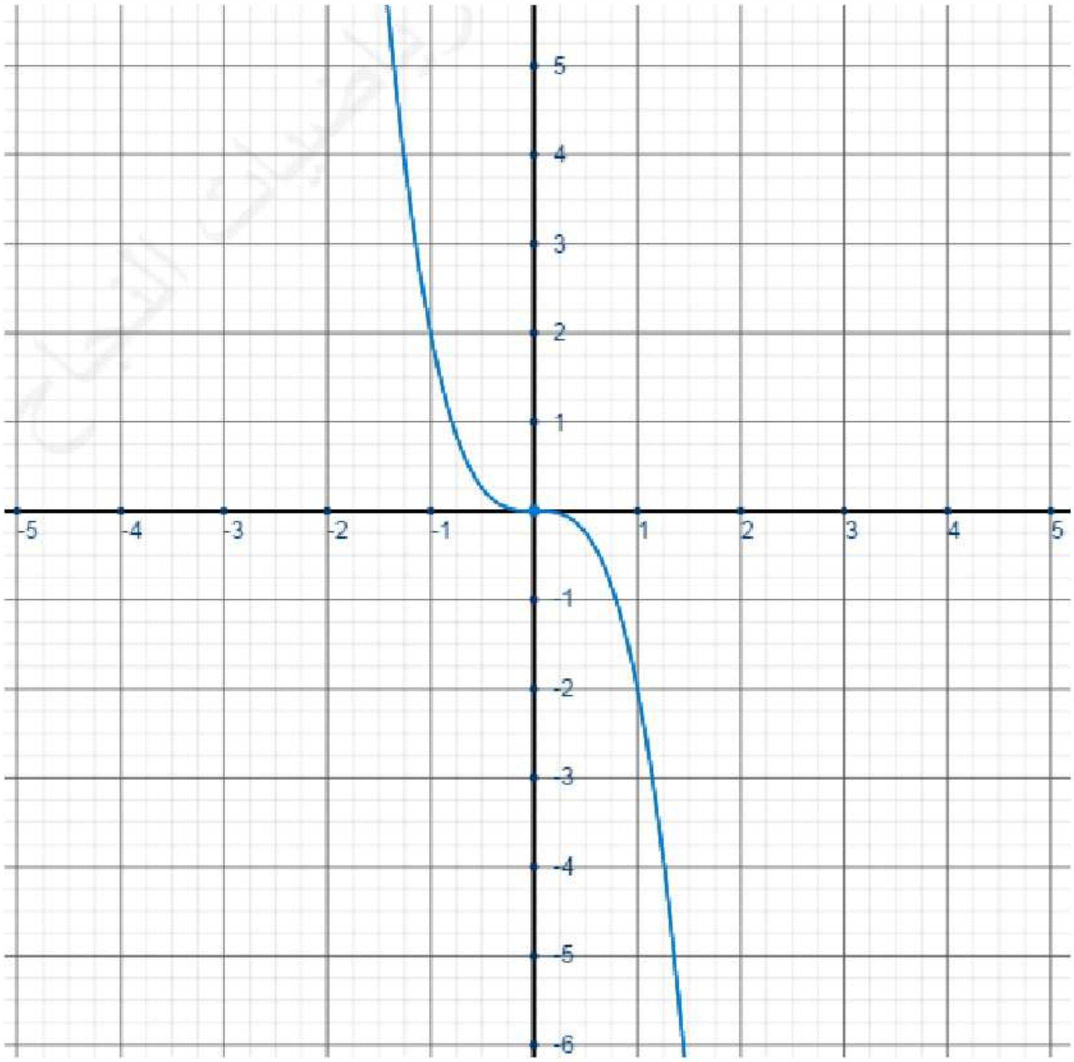
x	$-\infty$	2	$+\infty$
$p(x)$		0	$\nearrow$



$\boxed{q(x)=-2x^3}$

q عبارة عن دالة على شكل $a x^3$ و بما أن $a = -2 < 0$ ، فإن :

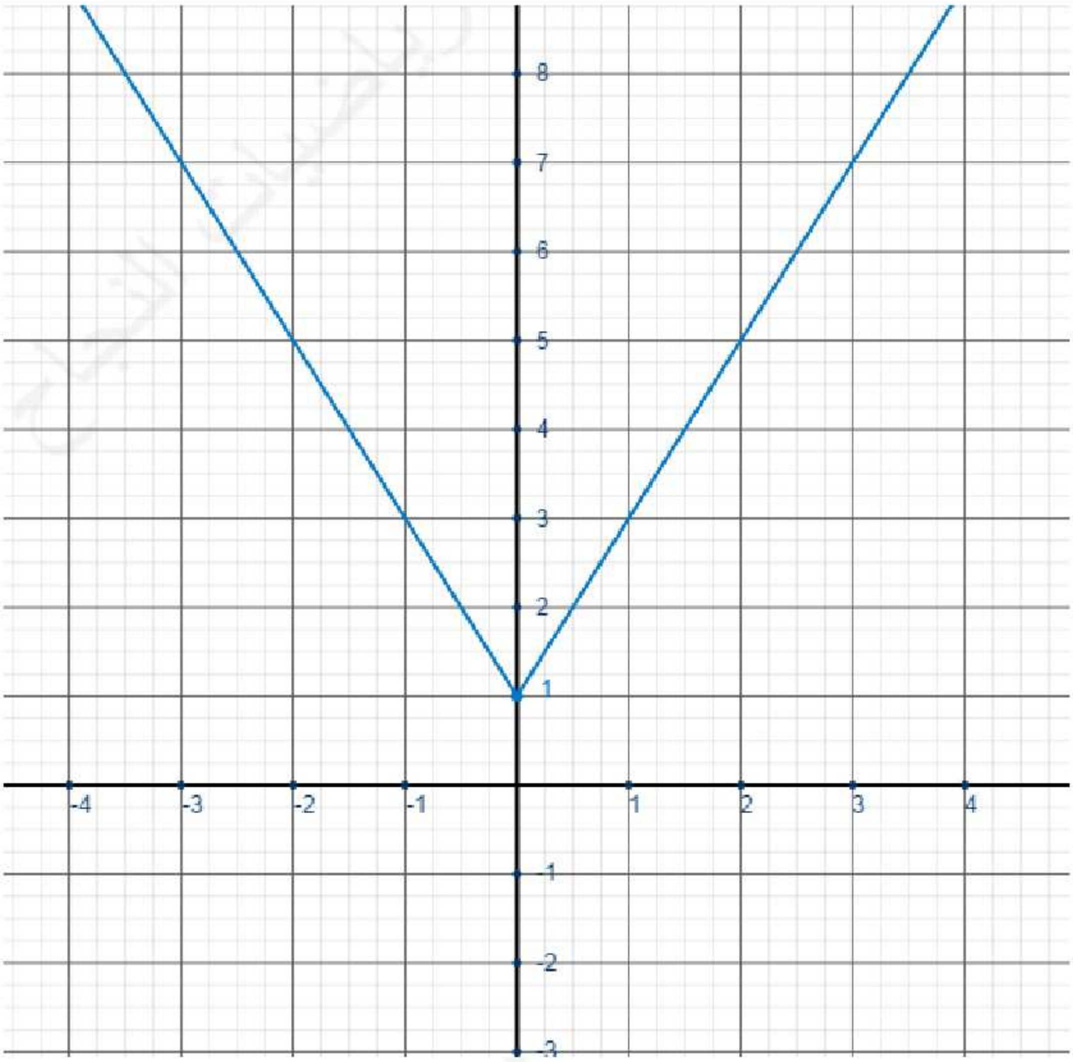
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↘



$\boxed{m(x)=2\,|x|+1}$

نبين بسهولة أن m دالة زوجية و أن قصورها على $[0;+\infty[$ ($\forall x\in[0;+\infty[\ \ m(x)=2x+1$) هو دالة تآلفية أي تمثيلها المبياني على هذا المجال سيكون نصف مستقيم، و باستعمال الزوجية نجد:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$m(x)$	↘	1	↗



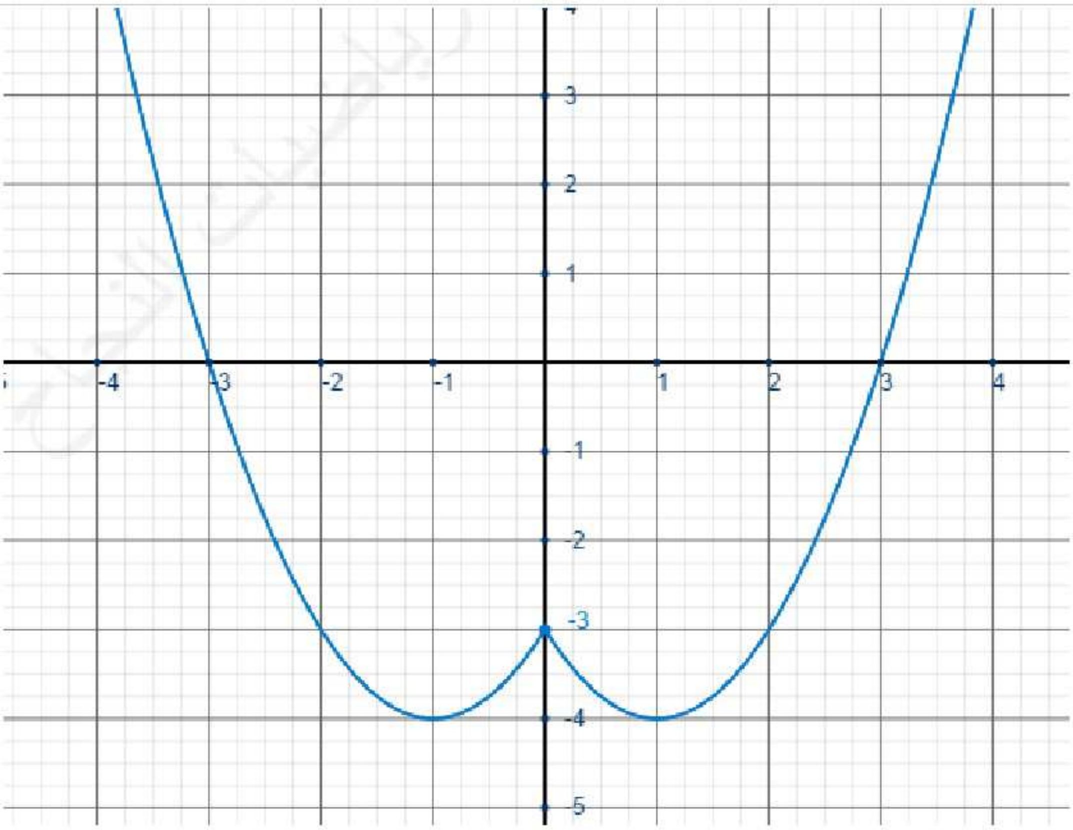
للتذكير نحتاج بالطبع لحساب صورة عددين (في الشكل أعلاه: $m(0)=1$ و $m(1)=3$)

نبين بسهولة أن t دالة زوجية و أن قصورها على $[0;+\infty[$

($\forall x\in[0;+\infty[\quad t(x)=x^2-2x-3$) هو دالة حدودية من الدرجة الثانية أي تمثيلها المبياني على هذا المجال سيكون جزءا من شلجم، و باستعمال الزوجية نجد:

$t(x)=x^2-2|x|-3$

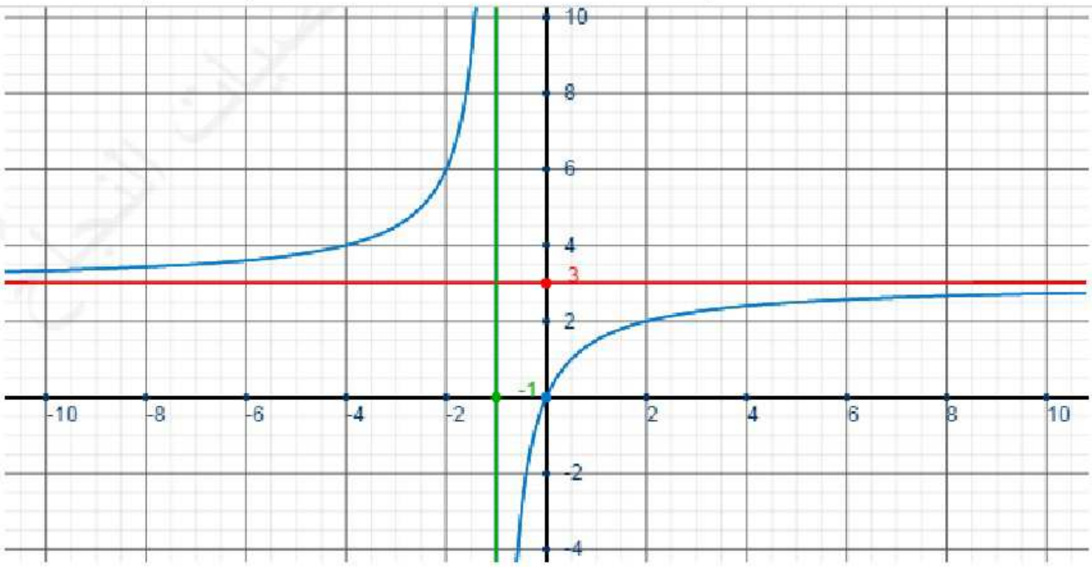
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$t(x)$	↖		-4	↗	-3	↘	-4	↗	



إذا كانت دالة ما زوجية أو فردية فيكفي دراستها على $[0;+\infty[$ لاستنتاج منحناها على كل المجموعة IR

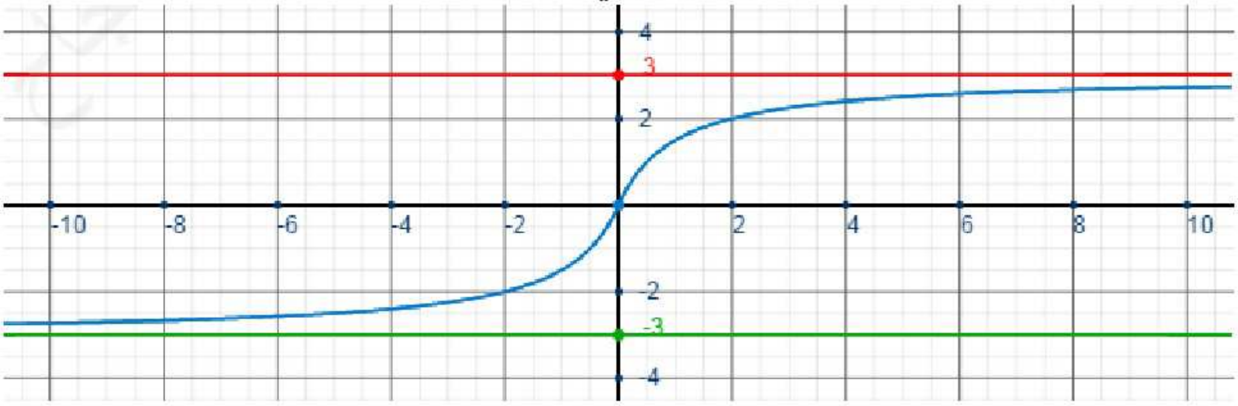
نبين بسهولة أن r دالة فردية و أن قصورها على $[0;+\infty[$ ($\forall x\in[0;+\infty[\ \ r(x)=\frac{3x}{x+1}$) هو خارج حدانيتين أي أن تمثيلها المبياني على هذا المجال سيكون جزءا من هذلول وباستعمال الزوجية نجد: (بعد إنجاز جدول التغيرات الدالة $x\mapsto\frac{3x}{x+1}$ نحتفظ بالجزء الذي يتضمن المجال $[0;+\infty[$ و لكون الدالة فردية سيكون لها نفس الرتابة على $]-\infty;0]$)	$\boxed{r(x)=\frac{3x}{\lvert x\rvert+1}}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$r(x)$	↗	0	↗



التمثيل المبياني للدالة $x\mapsto\frac{3x}{x+1}$

التمثيل المبياني للدلة $r(x)$



تم إدراج التمثيل المبياني للدالة $x \mapsto \dfrac{3x}{x+1}$ فقط لأجل توضيح طريقة إنشاء التمثيل المبياني للدالة $r(x)$

تمرين 5 : $f(x) = x^2 + 4x + 3$

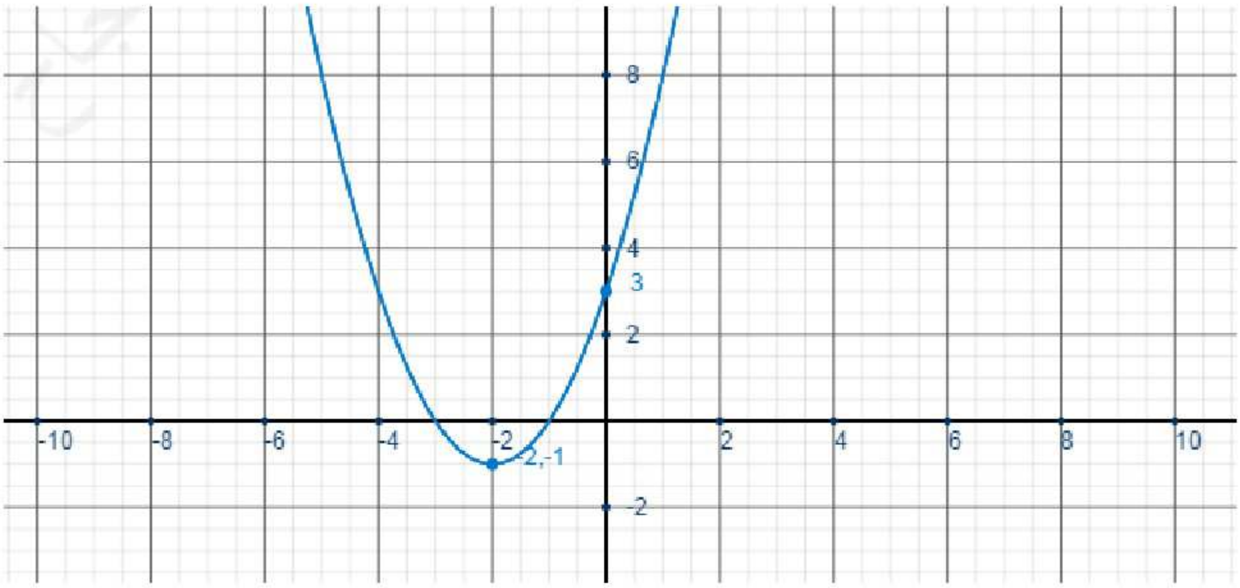
1

f عبارة عن دالة حدودية من الدرجة الثانية، إذن

جدول تغيراتها $\left(\dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-4}{2} = -2\right)$

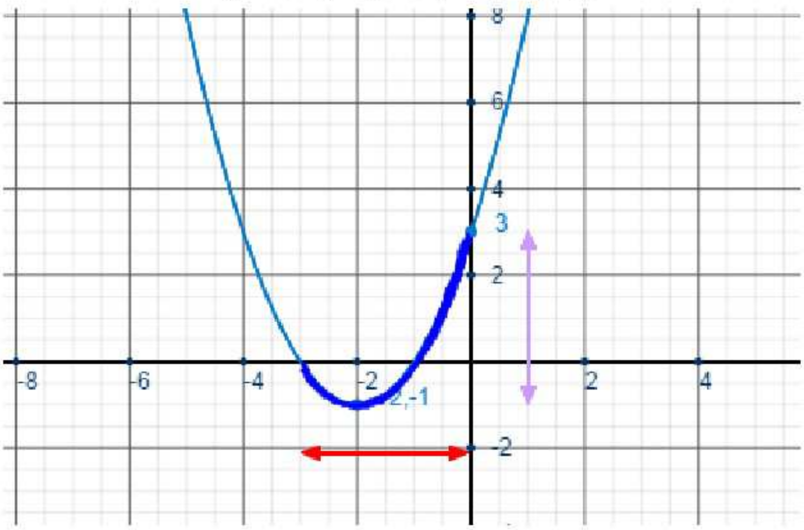
x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	

2



3

مبيانيا نجد: $f([-3,0]) = [-1;3]$



4

أ) لدينا $\forall x\in IR \quad f(x)=x^2+4x+4-1=(x+2)^2-1$

ب) لدينا من جهة :

$x\in[-3,0] \Rightarrow -3\le x\le 0 \Rightarrow -1\le x+2\le 2 \Rightarrow 0\le(x+2)^2\le 4 \Rightarrow -1\le(x+2)^2\le 3$

$x\in[-3,0] \Rightarrow f(x)\in[-1;3]$

إذن : $f([-3,0])\subset[-1;3]$

عكسيا : ليكن $y\in[-1;3]$ ولنبين $\exists x\in[-3;0] \ / \ f(x)=y$

من أجل ذلك نحل المعادلة: $f(x)=y$

$$\begin{aligned} y=f(x) &\Leftrightarrow y=(x+2)^2-1 \\ &\Leftrightarrow (x+2)^2=y+1 \\ &\Leftrightarrow x+2=\sqrt{y+1} \text{ ou } x+2=-\sqrt{y+1} \quad (\text{car } \ y+1\ge 0) \\ &\Leftrightarrow x=\sqrt{y+1}-2 \text{ ou } x=-\sqrt{y+1}-2 \end{aligned}$$

وبما أن :

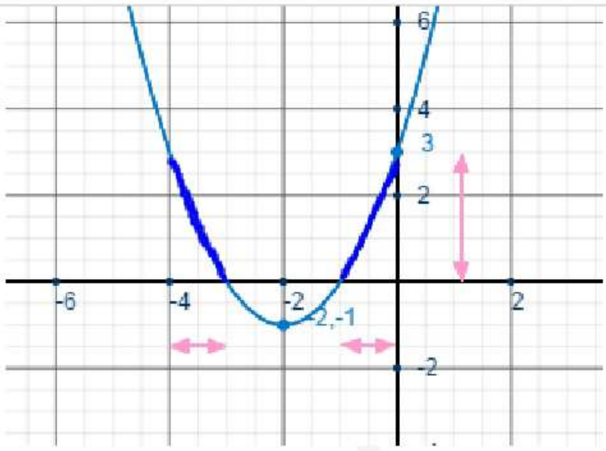
$y\in[-1;3] \Rightarrow -1\le y\le 3 \Rightarrow 0\le y+1\le 4 \Rightarrow 0\le\sqrt{y+1}\le 2 \Rightarrow -2\le\sqrt{y+1}-2\le 0$

$y\in[-1;3] \Rightarrow \sqrt{y+1}-2\in[-2;0] \Rightarrow \sqrt{y+1}-2\in[-3;0]$

إذن المعادلة $f(x)=y$ تقبل حلا على الأقل في المجال $[-1;3]$

بالتالي: $f([-3,0])=[-1;3]$

5



مبيانيا نجد: $\boxed{f^{-1}([0,3])=[-4;-3]\cup[-1;0]}$

6

$x\in f^{-1}([0,3]) \Leftrightarrow f(x)\in[0,3] \Leftrightarrow 0\le(x+2)^2-1\le 3 \Leftrightarrow 1\le(x+2)^2\le 4 \Leftrightarrow 1\le|x+2|\le 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\le x+2\le 2 \\ x+2\ge 1 \text{ ou } x+2\le -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4\le x\le 0 \\ x\ge -1 \text{ ou } x\le -3 \end{cases} \Leftrightarrow (-4\le x\le -3 \text{ ou } -1\le x\le 0)$$

منه: $\boxed{f^{-1}([0,3])=[-4;-3]\cup[-1;0]}$

تمرين 1 : نعتبر الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x)=\frac{x}{3}+\frac{3}{x}$

1) ادرس زوجية الدالة f .

2) أ) تحقق أن لكل x و y من $]0;+\infty[$ حيث $x\neq y$: $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\frac{xy-9}{3xy}$

ب) استنتج تغيرات f على كل من المجالين $]0;3]$ و $[3,+\infty[$

ج) اعط جدول تغيرات الدالة f على IR^*

3) استنتج القيمة الدنوية للدالة f على $]0;+\infty[$ و القيمة القصوى على $]-\infty;0[$

تمرين 2 : نعتبر الدالة العددية المعرفة على IR بما يلي : $f(x)=x^3+3x^2+3x+5$

1) تحقق أن لكل x و y من IR حيث $x\neq y$: $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\left(x+\frac{y+3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(y+1)^2$

2) استنتج تغيرات f على IR

تمرين 3 : نعتبر الدالتين $f(x)=x^2-1$ و $g(x)=\frac{x+1}{x-1}$

1) اعط جدول تغيرات كل من f و g

2) تحقق أن (C_f) و (C_g) يتقاطعان في $A_1(-1;0)$ و $A_2(0;-1)$ و $A_3(2;3)$

3) أنشئ في نفس المعلم م.م.م (C_f) و (C_g) .

4) حدد مبيانيا صورة المجال $]2;+\infty[$ بالدالة g .

5) نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $I=]2;+\infty[$ بما يلي: $h(x)=\frac{4x}{(x-1)^2}$

أ) تحقق أن : $h(x)=f\circ g(x)$ لكل x من I

ب) ادرس رتابة الدالة h على I

تمرين 4 : نعتبر الدالتين $f(x)=\frac{1}{4}(x^2-2x)$ و $g(x)=\sqrt{x}$

1) اعط جدول تغيرات الدالة f

2) احسب $f(0)$ و $f(2)$ و $f(4)$ و $g(4)$ ثم أنشئ (C_f) و (C_g) في م.م.م $(O;\vec{i};\vec{j})$

3) حل مبيانيا المعادلة $f(x)=g(x)$

4) حل مبيانيا المتراجحة $f(x)<g(x)$

5) نعتبر الدالة المعرفة على IR^+ بما يلي : $h(x)=\frac{1}{4}(x-2\sqrt{x})$ ، حدد منحى تغيرات الدالة h على IR^+

تمرين 5 : نعتبر الدوال : $f(x)=x^2-2x-3$ و $g(x)=x^2-2|x|-3$ و $h(x)=|x^2-2x-3|$

1) أ) اعط جدول تغيرات الدالة f ثم أنشئ (C_f) في م.م.م $(O;\vec{i};\vec{j})$

ب) حل مبيانيا المتراجحة : $f(x)\leq -3$

ج) حدد عدد حلول المعادلة $f(x)=m$ حسب قيم البارامتر m

2) أ) ادرس زوجية الدالة g

ب) اعط جدول تغيرات الدالة g ثم أنشئ (C_g) في المعلم السابق.

3) أ) أوجد جدول إشارة الدالة f

ب) استنتج تبسيطا للدالة h على $]-\infty;-1]$ و $[-1;3]$ و $[3;+\infty[$ 4) أنشئ (C_h) في المعلم السابق.	

السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	عموميات حول الدوال العددية حلول مقترحة	سلسلة 2

تمرين 1 : $f(x)=\dfrac{x}{3}+\dfrac{3}{x}$

1

لدينا : $Df=\{x\in IR \,/\, x\neq 0\}=IR^*$ ، منه : $x\in Df \Rightarrow x\neq 0 \Rightarrow -x\neq 0 \Rightarrow -x\in Df$

و من جهة أخرى : $\forall x\in Df \quad f(-x)=-\dfrac{x}{3}+\dfrac{3}{-x}=\dfrac{-x}{3}+\dfrac{-3}{x}=-f(x)$

بالتالي : f دالة فردية.

2

أ) ليكن x و y من $]0;+\infty[$ حيث $x\neq y$ ، لدينا :

$$T(x,y)=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\frac{\frac{x}{3}+\frac{3}{x}-\frac{y}{3}-\frac{3}{y}}{x-y}=\frac{\frac{x-y}{3}+\frac{3y-3x}{xy}}{x-y}=\frac{(x-y)\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{xy}\right)}{x-y}=\frac{1}{3}-\frac{3}{xy}=\frac{xy-9}{3xy}$$

ب) ليكن : x و y من $]0;3]$ حيث $x\neq y$:

لدينا : $\begin{cases} x\in]0;3] \\ y\in]0;3] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0<x\leq 3 \\ 0<y\leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy>0 \\ 0<xy\leq 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy>0 \\ xy-9\leq 0 \end{cases} \Rightarrow T(x,y)\leq 0$

ليكن : x و y من $[3,+\infty[$ حيث $x\neq y$:

لدينا : $\begin{cases} x\in [3,+\infty[\\ y\in [3,+\infty[\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq 3 \\ y\geq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy>0 \\ xy\geq 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy>0 \\ xy-9\geq 0 \end{cases} \Rightarrow T(x,y)\geq 0$

إذن : f تناقصية على $]0;3]$ و تزايدية على $[3,+\infty[$

ج) حسب السؤال السابق و باستعمال فردية الدالة نستنتج أن :

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	-2	$\searrow$	‖	$\searrow$	2	$\nearrow$	

3

حسب جدول التغيرات نستنتج أن القيمة الدنوية للدالة f على $]0;+\infty[$ هي $f(3)=2$ و القيمة القصوى على $]-\infty;0[$ هي $f(-3)=-2$

تمرين 2 : $f(x)=x^3+3x^2+3x+5$

1

ليكن x و y من IR حيث $x\neq y$ ، لدينا :

$$f(x)-f(y)=\left(x^3+3x^2+3x+5\right)-\left(y^3+3y^2+3y+5\right)=\left(x^3-y^3\right)+3\left(x^2-y^2\right)+3(x-y)$$

$$=(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)+3(x-y)(x+y)+3(x-y)$$

$$f(x)-f(y)=(x-y)\left(x^2+xy+y^2+3(x+y)+3\right)$$

منه : $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=x^2+xy+y^2+3x+3y+3$

من جهة أخرى ، لدينا :

$$\left(x+\frac{y+3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(y+1)^2=x^2+x(y+3)+\frac{(y+3)^2}{4}+\frac{3}{4}\left(y^2+2y+1\right)$$

$$=x^2+xy+3x+\frac{y^2+6y+9+3y^2+6y+3}{4}$$

$$=x^2+x\,y+3x+\frac{4y^2+12y+12}{4}$$

$$\left(x+\frac{y+3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(y+1)^2=x^2+x\,y+3x+y^2+3y+3$$

بالتالي : $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=\left(x+\dfrac{y+3}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}(y+1)^2$

2 بما أن معدل تغير عددين حقيقيقن مختلفين دائما موجب فإن الدالة تزايدية على IR

<u>تمرين 3</u> : نعتبر الدالتين $f(x)=x^2-1$ و $g(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$

1

f عبارة عن دالة حدودية من الدرجة الثانية

إذن تمثيلها المبياني عبارة عن شلجم رأسه :

$\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{0}{2}=0$ ، وبما أن $a=1>0$ فإن :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↘	-1	↗	

g عبارة عن دالة على شكل $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ ، إذن

تمثيلها المبياني عبارة عن هذلول مركزه :

$\Omega(1,1)$ وبما أن $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2<0$ فالدالة تناقصية

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g(x)$		↘	‖	↘	

للتذكير مركز الهذلول هو : $\Omega\left(\dfrac{-d}{c},\dfrac{a}{c}\right)$

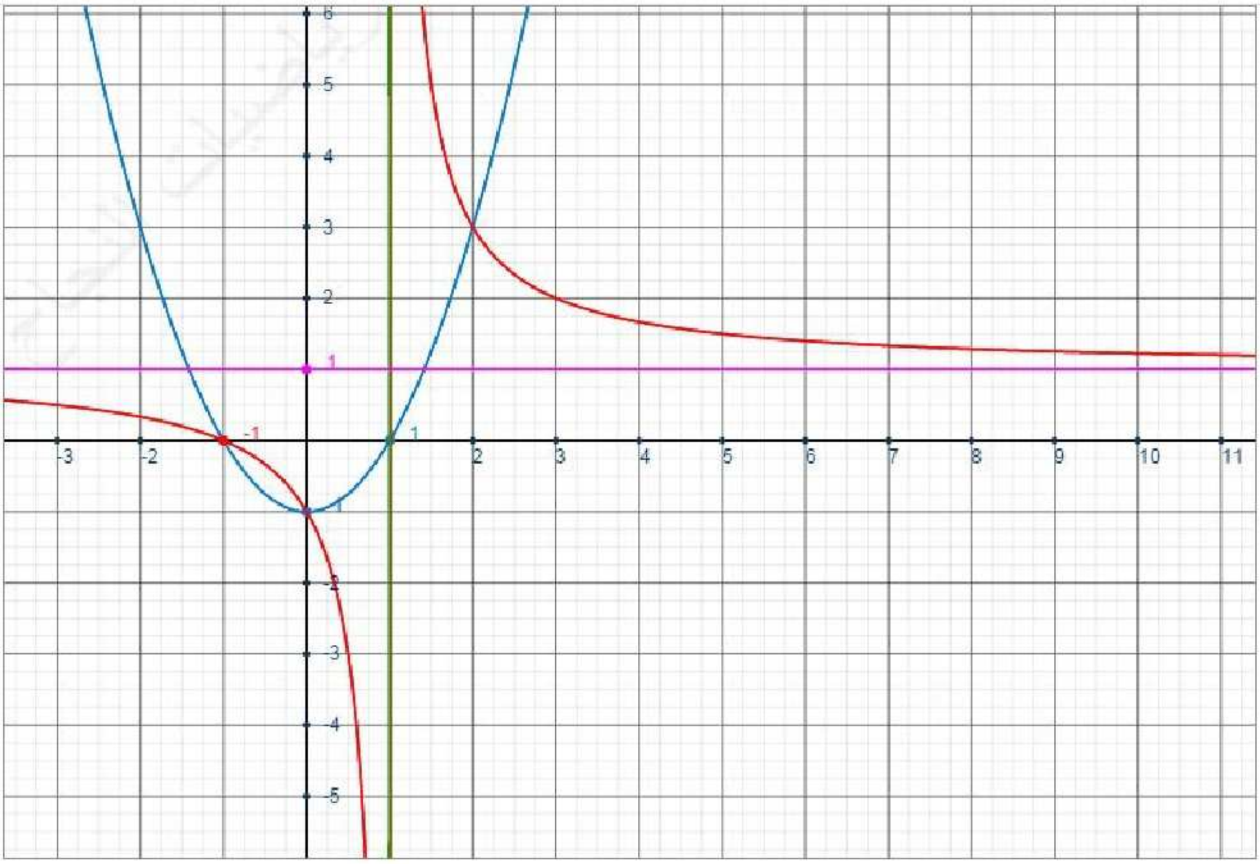
2

لدينا : $f(-1)=1-1=0$ و $g(-1)=\dfrac{0}{-2}=0$ منه : $f(-1)=g(-1)=0$

و أيضا : $f(0)=0-1=-1$ و $g(0)=\dfrac{1}{-1}=-1$ منه : $f(0)=g(0)=-1$

و أيضا : $f(2)=4-1=3$ و $g(2)=\dfrac{3}{1}=3$ منه : $f(2)=g(2)=3$

بالتالي (C_f) و (C_g) يتقاطعان في $A_1(-1;0)$ و $A_2(0;-1)$ و $A_3(2;3)$



3

4 مبيانيا نجد $g([2;+\infty[)=]1;3]$.

5 أ) لدينا لكل x من I

$$f\circ g(x)=f(g(x))=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2-1=\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2+2x+1-(x^2-2x+1)}{(x-1)^2}=\frac{4x}{(x-1)^2}=h(x)$$

ب) لدينا g تناقصية على $I=[2;+\infty[$ ، و $g([2;+\infty[)=]1;3]$ ، ولدينا f تزايدية على $]1;3]$

إذن h تناقصية على I

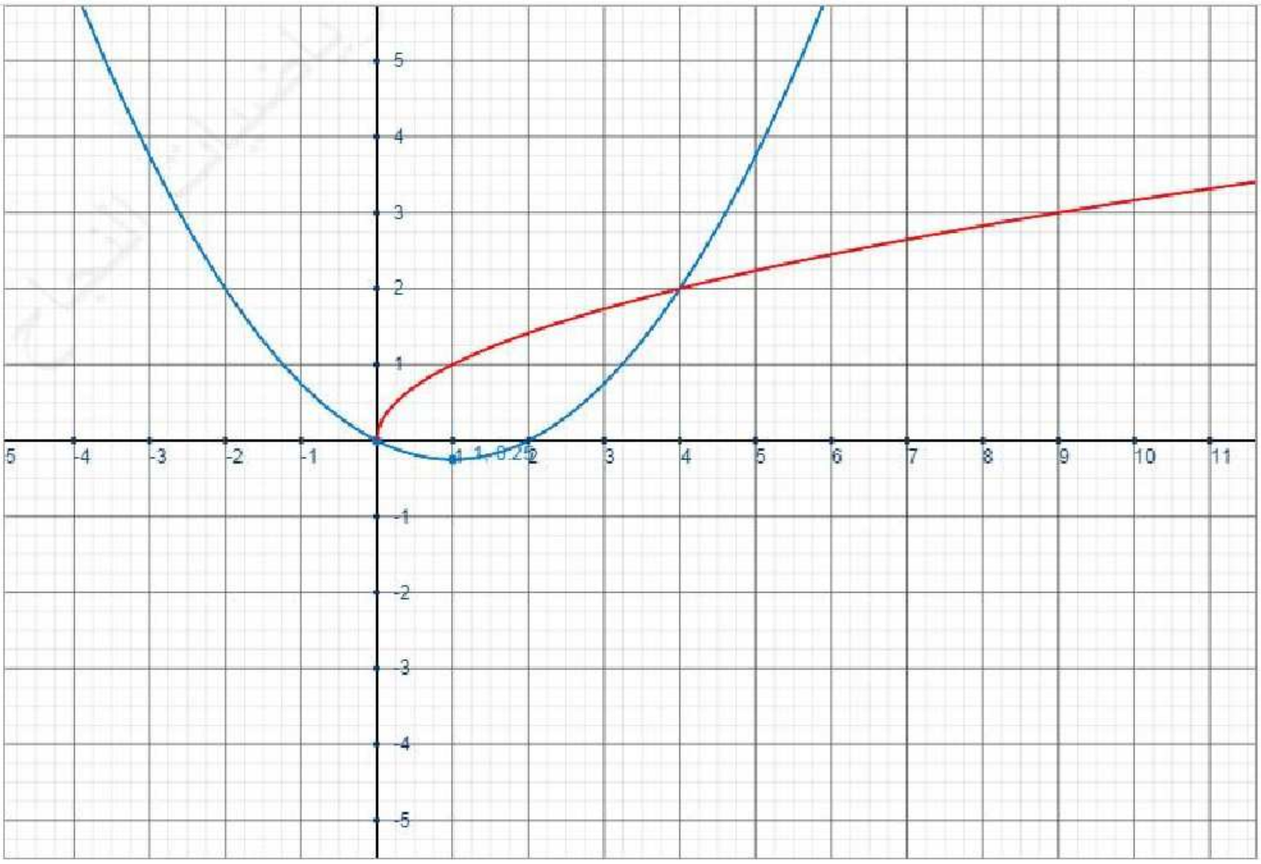
تمرين 4 : $f(x)=\frac{1}{4}(x^2-2x)$ و $g(x)=\sqrt{x}$

1 f عبارة عن دالة حدودية من الدرجة الثانية

إذن تمثيلها المبياني عبارة عن شلجم رأسه :

$\frac{-b}{2a}=\frac{\frac{2}{4}}{\frac{1}{2}}=1$ ، وبما أن $a=\frac{1}{4}>0$ فإن :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$



2 — $f(0)=0$ و $f(2)=0$ و $f(4)=2$ و $g(4)=2$

3 — مبيانيا المعادلة $f(x)=g(x)$ تقبل حلين هما : 0 و 4

4 — مبيانيا مجموعة حلول المتراجحة $f(x)<g(x)$ هي : $S=]0;4[$

5 — نعتبر الدالة المعرفة على IR^+ بما يلي : $h(x)=\frac{1}{4}\left(x-2\sqrt{x}\right)$ ، حدد منحى تغيرات الدالة h على IR^+

لدينا : $h(x)=\frac{1}{4}\left(x-2\sqrt{x}\right)=\frac{1}{4}\left(\left(\sqrt{x}\right)^2-2\sqrt{x}\right)=f\left(g(x)\right)=f\circ g(x)$

- لدينا g تزايدية على $[1;+\infty[$ ، ولدينا مبيانيا $g([1;+\infty[)=[1;+\infty[$
وبما أن f تزايدية على $[1;+\infty[$ فإن h تزايدية على $[1;+\infty[$

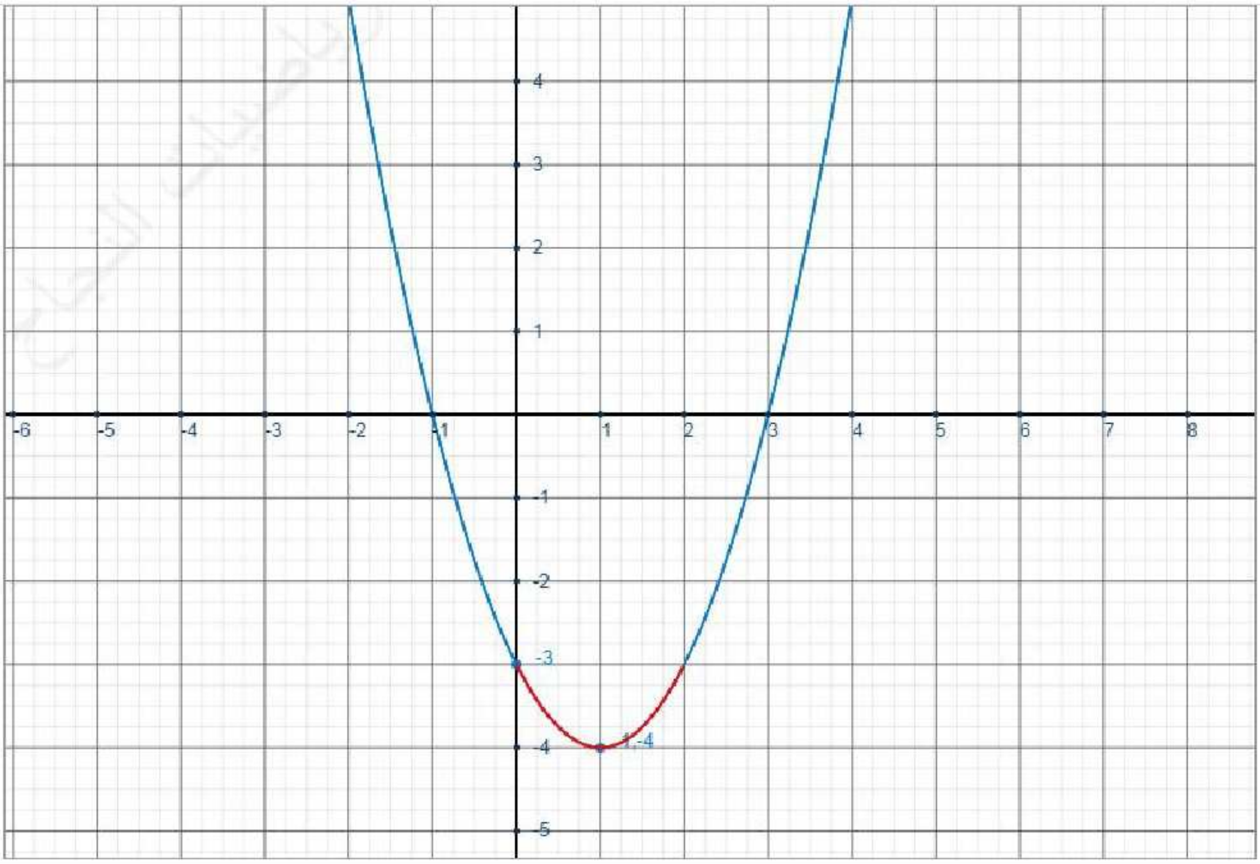
- لدينا g تزايدية على $[0;1]$ ، ولدينا مبيانيا $g([0;1])=[0;1]$
وبما أن f تناقصية على $[0;1]$ فإن h تناقصية على $[0;1]$

لم يكن ممكنا دراسة الرتابة على IR^+ مباشرة لأن $g(0)=[0;+\infty[$ ، لكن رتابة f على هذا المجال متغيرة(ليست دائما تزايدية و لا تناقصية)، لذلك قمنا بتقسيم المجال لمجالين حيث يكون صورة كل منهما عبارة عن مجال تكون فيه رتابة الدالة f ثابتة.

تمرين 5 : نعتبر الدوال : $f(x)=x^2-2x-3$ و $g(x)=x^2-2|x|-3$ و $h(x)=\left|x^2-2x-3\right|$

1 — أ) f عبارة عن دالة حدودية من الدرجة الثانية
إذن تمثيلها المبياني عبارة عن شلجم رأسه :
$\frac{-b}{2a}=\frac{2}{2}=1$ ، وبما أن $a=1>0$ فإن :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	↘	-4	↗



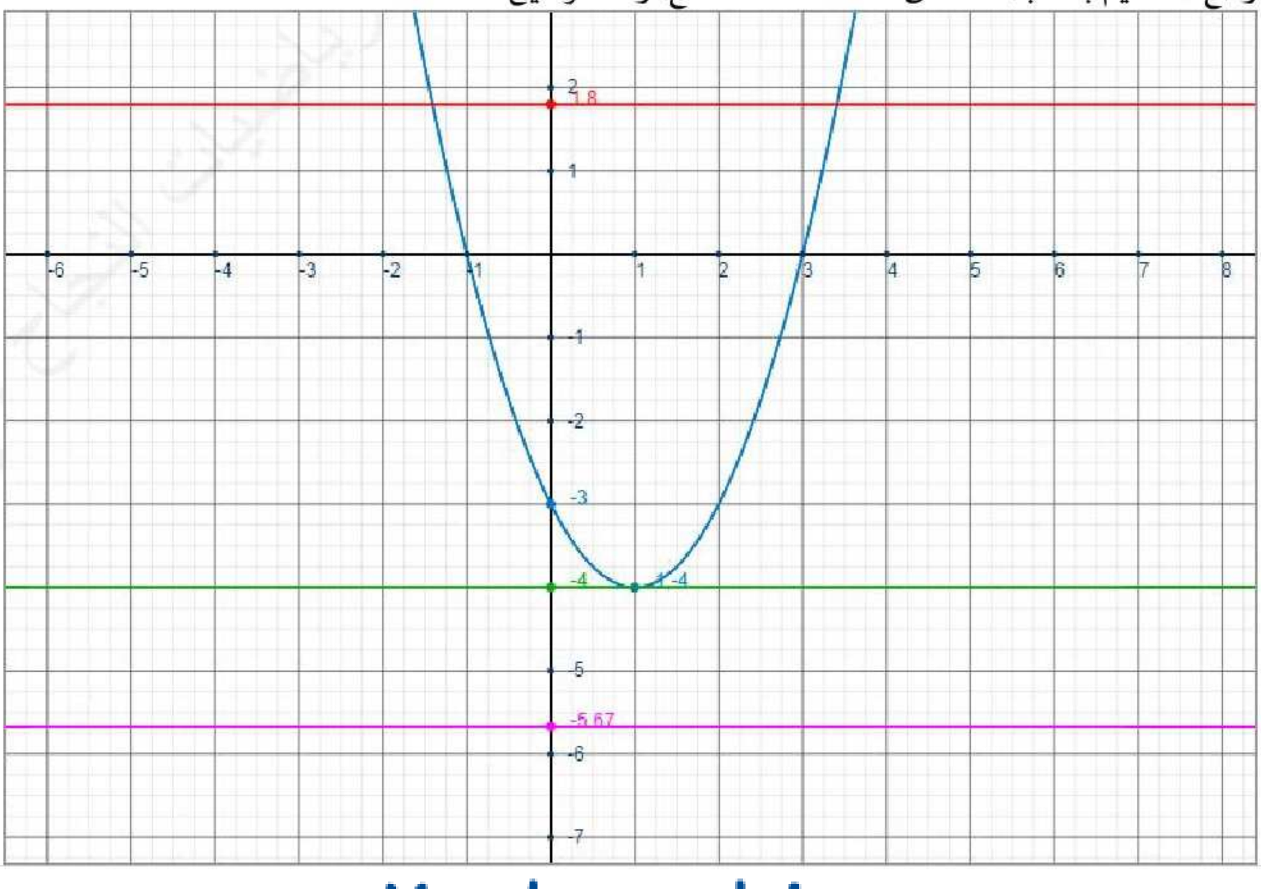
ب) مبيانيا نجد أن مجموعة حلول المتراجحة : $f(x)\le -3$ هي: $S=[0;2]$

- إذا كان $m<-4$ فالمعادلة $f(x)=m$ لا حل لها
- إذا كان $m=-4$ فالمعادلة $f(x)=m$ لها حل وحيد (هو $x=1$)
- إذا كان $m>-4$ فالمعادلة $f(x)=m$ لها حلان بالضبط.

ليس مطلوبا حل المعادلة بل فقط تحديد عدد الحلول

الطريقة تعتمد على تخيل مستقيم مواز لمحور الأفاصيل و يقطع محور الأفاصيل في نقطة أرتوبها m ، و وفق وضع المستقيم بالنسبة للمنحنى نحدد حالات التقاطع، و هذا توضيح:

ج)

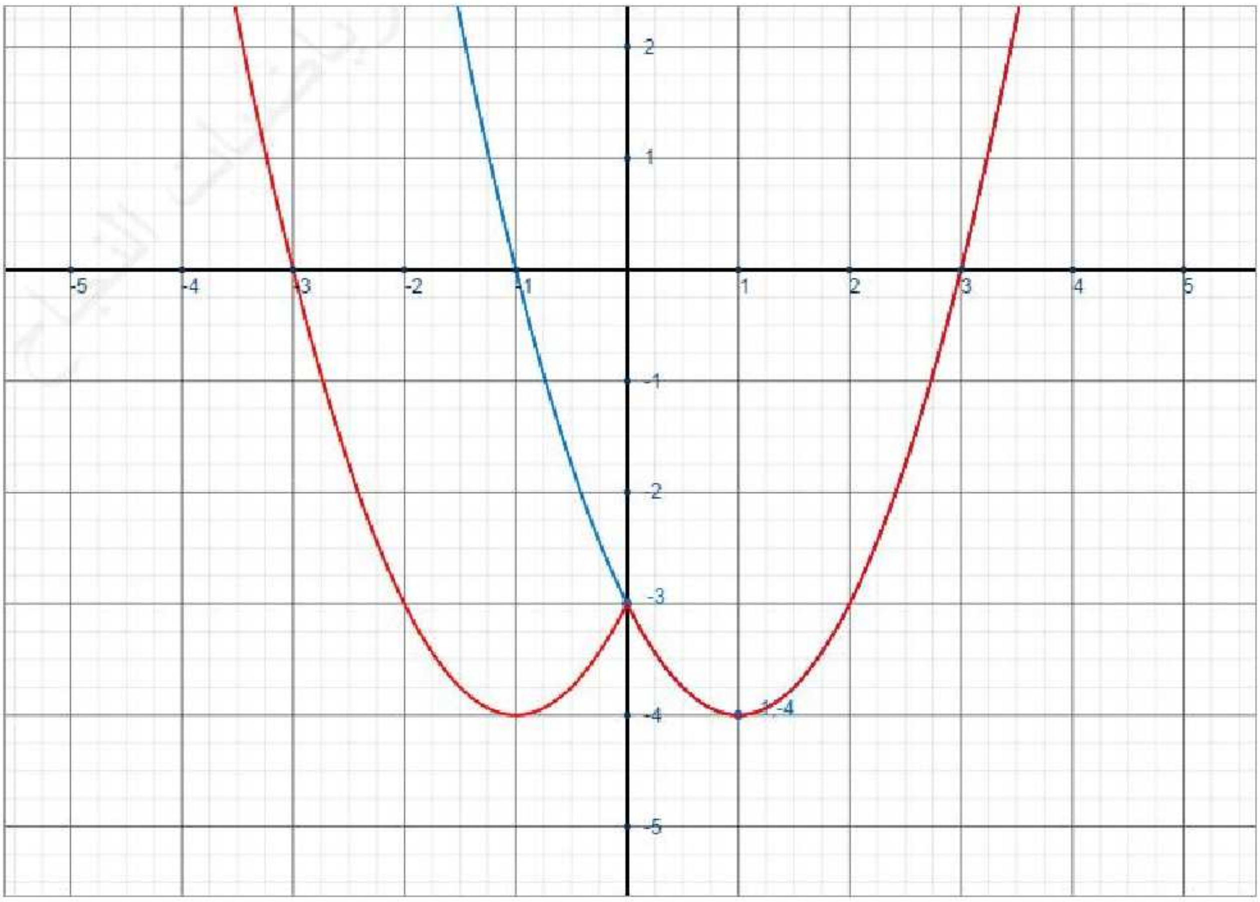


أ) $Dg = IR$ و $g(x)=g(-x)$ $\forall x \in IR$ إذن f دالة زوجية.

2 ب) بما أن f دالة زوجية، فتمثيلها المبياني متماثل بالنسبة لمحور الأراتيب.

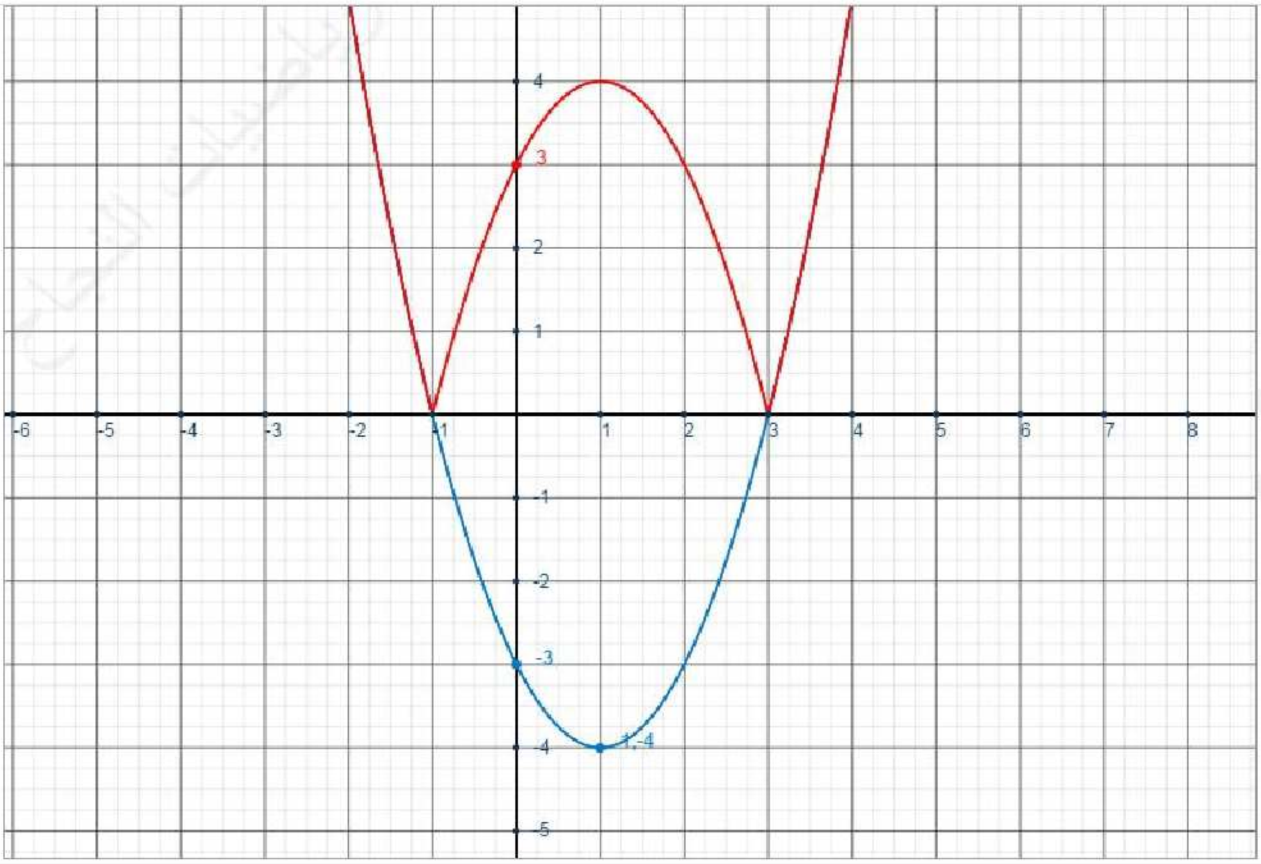
بما أن $g(x)=f(x)$ $\forall x \in IR^+$ فالتمثيل المبياني للدالة g هو نفس التمثيل المبياني للدالة f على IR^+

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f(x)$		↘	-4	↗	-3	↘	-4	↗	



3 أ) على $]-\infty;-1]$ و $[3;+\infty[$ $f(x)\geq 0$ منه $h(x)=f(x)$

و على $[-1;3]$ $f(x)\leq 0$ منه $h(x)=-f(x)$



4

سلسلة 3	عموميات حول الدوال العددية	السنة 1 بكالوريا علوم رياضية

تمرين 1 : نعتبر الدوال : $f(x)=x^2+4x+1$ و $g(x)=\sqrt{x+4}$ و $h(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$

1) حدد Dg و Dh

2) بين أن f مصغورة بـ -3

3) اعط جدول تغيرات الدالتين f و g

4) تحقق أن : $h=g\circ f$

5) ادرس رتابة الدالة h على $]-\infty;-2]$ و $[-2;+\infty[$

تمرين 2 : نعتبر الدوال $f(x)=x^2-4x+3$ و $g(x)=x^2$ و $h(x)=x^4-4x^2+3$

1) ادرس زوجية الدالة h

2) اعط جدول تغيرات الدالتين f و g

3) اكتب h على شكل مركب دالتين.

4) حدد $g\left(\left[0;\sqrt{2}\right]\right)$ و $g\left(\left[\sqrt{2};+\infty\right[\right)$

5) استنتج جدول تغيرات الدالة h على IR .

6) أنشئ (C_h) في م.م.م $(O;\vec{i};\vec{j})$

7) نعتبر الدالة المعرفة على IR بما يلي : $p(x)=\left|x^4-4x^2+3\right|$

أ) أنشئ (C_p) في المعلم السابق

ب) حدد عدد حلول المعادلة $\left|x^4-4x^2+3\right|=m$ حسب قيم البارامتر m

تمرين 3 : نعتبر الدالتين : $f(x)=x^2-x$ و $g(x)=\sqrt{|x|}$ والمستقيم $(\Delta):\ y=-2x+2$

1) اعط جدول تغيرات الدالتين f و g

2) أنشئ في نفس المعلم (C_f) و (C_g) و (Δ)

3) حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة $\sqrt{|x|}+2x=2$

4) حدد جبريا إحداثيتي نقط تقاطع (C_f) و (Δ)

5) حل مبيانيا المتراجحات التالية : $g(x)\leq 3$ ، $g(x)\geq 2$ ، $-2x+2<f(x)<2$

6) حدد مبيانيا صور المجالات : $I=\left[0;\frac{1}{4}\right[$ و $I=\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$ بالدالة g

و صور المجالات : $[-2;1]$ و $[2;+\infty[$ و $]-\infty;0]$ بالدالة f

7) حدد تغيرات الدالة $h(x)=x-\sqrt{x}$ على مجموعة تعريفها

8) أنشئ في المعلم السابق منحنى الدالتين : $k(x)=x^2+|x|$ و $p(x)=\left|x^2-x\right|$ ،

9) m بارامتر حقيقي ، حدد حسب قيم m عدد حلول المعادلة $x^2+|x|=m$

تمرين 4 :

1) حدد الجزء الصحيح للأعداد التالية : (حيث $n\in IN^*$)

$\sqrt{3}$ ، $\sqrt{7}+5$ ، $\left(\sqrt{2}+1\right)^2$ ، $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ ، $\sqrt{n^2+n}$ ، $\frac{2n+1}{2n}$ ، $\frac{2n+3}{n+1}$ ، $\frac{n^2+2n+4}{n+1}$

2) حل في IR المعادلات : $E(x)=3$ ، $E(3x+5)=-1$ ، $4E(x^2+5)=7$ ، $E\left(\frac{x+1}{2}\right)=\frac{x}{3}$

3) حل في IR المتراجحات : $E(x)\le 4$ ، $2E(x)\le 5$ ، $E(x)\ge 2$ ، $2E(x)\ge 5$ ، $\lvert E(3x)\rvert<10$	
تمرين 5 : ـ مزيدا من التفكير ـ <u>السؤالان مستقلان</u> 1) حدد القيمة الدنوية المطلقة و القيمة المطلقة القصوية للدالة $f(x)=\dfrac{x}{x^2+x+1}$ 2) حل في IR المعادلة : $E(x^2)=(E(x))^2$	

السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	عموميات حول الدوال العددية حلول مقترحة	سلسلة 3

تمرين 1 : $f(x)=x^2+4x+1$ و $g(x)=\sqrt{x+4}$ و $h(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$

1 $Dg=\{x\in IR/x+4\geq 0\}=\{x\in IR/x\geq -4\}=[-4;+\infty[$

$Dh=\{x\in IR/x^2+4x+5\geq 0\}$

$\Delta=16-20=-4<0$ ، منه : $Dh=IR$

2 لنبين أن : $\forall x\in IR \quad f(x)\geq -3$

لدينا : $\forall x\in IR \quad f(x)-(-3)=x^2+4x+1+3=x^2+4x+4=(x+2)^2\geq 0$

بالتالي : $\forall x\in IR \quad f(x)\geq -3$

3 f عبارة عن دالة حدودية من الدرجة الثانية ، إذن تمثيلها المبياني عبارة عن شلجم رأسه : $\frac{-b}{2a}=\frac{-4}{2}=-2$ ، إذن :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$		↘	-3	↗	

g عبارة عن دالة على شكل $\sqrt{x+a}$ ، إذن :

x	$-\infty$		-4		$+\infty$
$g(x)$			0	↗	

4 لدينا : $\forall x\in IR \quad g\circ f(x)=g(f(x))=\sqrt{f(x)+4}=\sqrt{x^2+4x+1+4}=\sqrt{x^2+4x+5}=h(x)$

5

رتابة الدالة h على $]-\infty;-2]$	رتابة الدالة h على $[-2;+\infty[$
▪ لدينا f تناقصية على $]-\infty;-2]$ ▪ لدينا $f(]-\infty;-2])=[f(-2);+\infty[=[-3;+\infty[$ ▪ لدينا g تزايدية على $[-3;+\infty[$ إذن h تناقصية على $]-\infty;-2]$	▪ لدينا f تزايدية على $[-2;+\infty[$ ▪ لدينا $f([-2;+\infty[)=[f(-2);+\infty[=[-3;+\infty[$ ▪ لدينا g تزايدية على $[-3;+\infty[$ إذن h تزايدية على $[-2;+\infty[$

لتحديد رتابة المركب $p\circ q(x)$ على مجال I ، نتبع 3 مراحل:

1) ندرس رتابة $q(x)$ على I 2) نحسب J صورة I بالدالة $q(x)$ 3) ندرس رتابة الدالة $p(x)$ على المجال J

و في الأخير نحدد رتابة المركب انطلاقا من نتائج المرحلتين الأولى و الثالثة مثل قاعدة إشارة جداء

تمرين 2 : نعتبر الدوال $f(x)=x^2-4x+3$ و $g(x)=x^2$ و $h(x)=x^4-4x^2+3$

1 لدينا : $Dh=IR$ و $\forall x\in IR \quad h(-x)=h(x)$ إذن h دالة زوجية

2 f عبارة عن دالة حدودية من الدرجة الثانية ، إذن تمثيلها المبياني عبارة عن شلجم رأسه $\frac{-b}{2a}=\frac{4}{2}=2$ ، إذن :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		↘	-1	↗	

g عبارة عن دالة حدودية من الدرجة الثانية ، إذن تمثيلها المبياني عبارة عن شلجم رأسه $\frac{-b}{2a}=\frac{0}{2}=0$ ، إذن :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		↘	0	↗	

3 $\forall x \in IR \quad h(x) = f(g(x)) = f \circ g(x)$

4
g تزايدية على $[0;\sqrt{2}]$ إذن : $g([0;\sqrt{2}]) = [g(0); g(\sqrt{2})] = [0;2]$

g تزايدية على $[\sqrt{2};+\infty[$ إذن : $g([\sqrt{2};+\infty[) = [g(\sqrt{2});+\infty[= [2;+\infty[$

يمكن الاستعانة بجدول التغيرات مباشرة.

لدينا g تزايدية على $[0;\sqrt{2}]$ و $g([0;\sqrt{2}]) = [0;2]$ و f تناقصية على $[0;2]$

إذن h تناقصية على $[0;\sqrt{2}]$

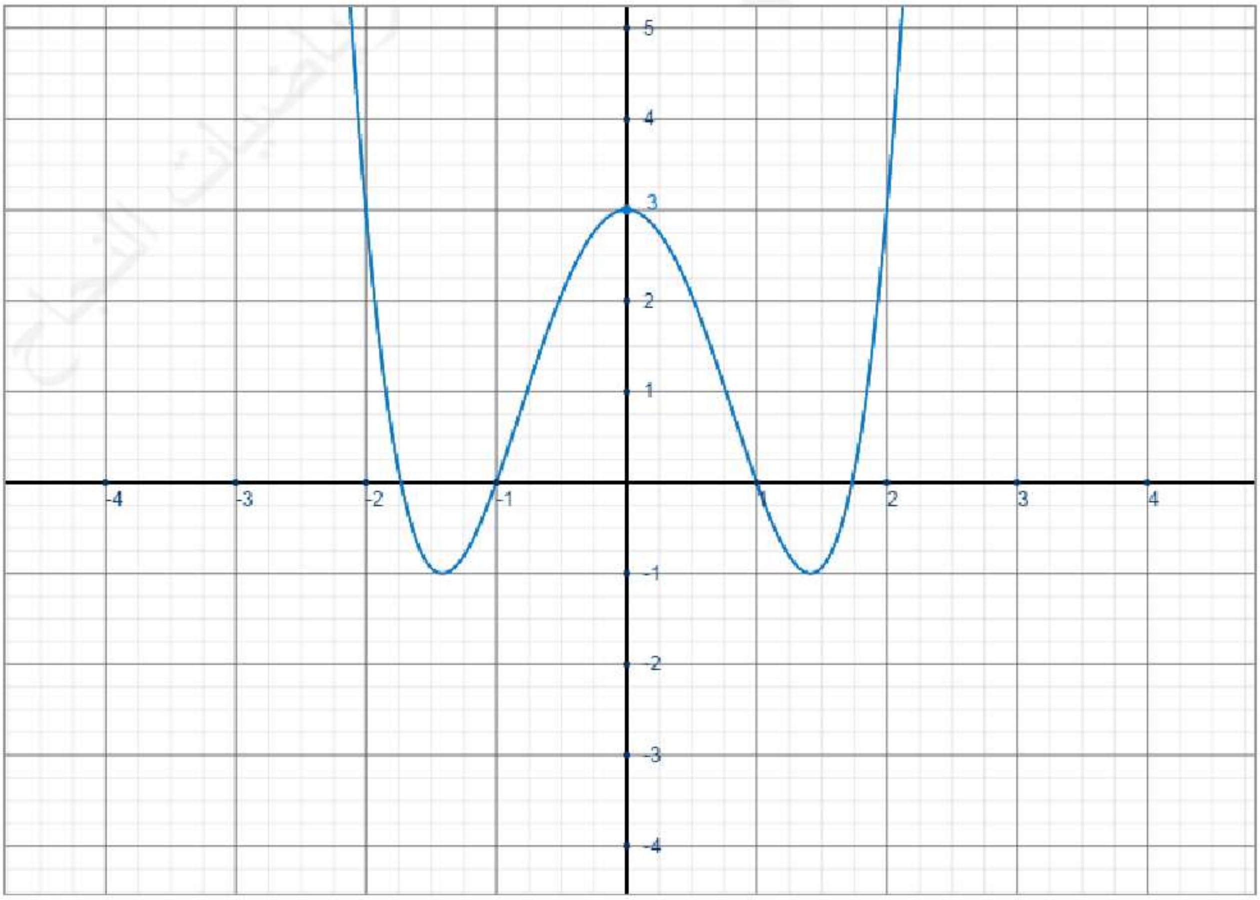
ولدينا g تزايدية على $[\sqrt{2};+\infty[$ و $g([\sqrt{2};+\infty[) = [2;+\infty[$ و f تزايدية على $[2;+\infty[$

إذن h تزايدية على $[\sqrt{2};+\infty[$

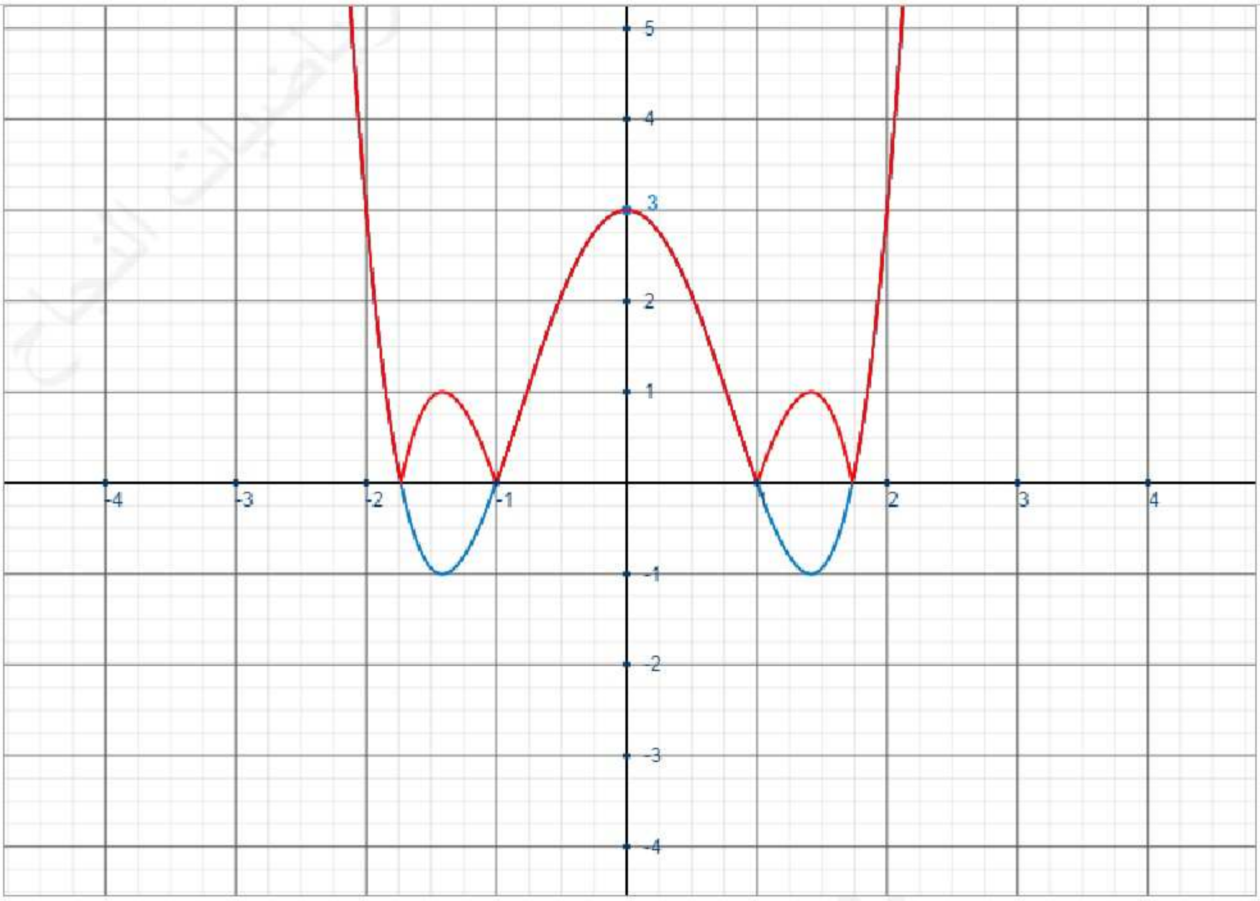
5

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$h(x)$	↘	-1	↗ 3 ↘	-1	↗

6



7 لإنشاء الدالة (C_p) نحتفظ بمنحنى الدالة h الذي تكون فيه موجبة و نعكسه في الحالة الأخرى



أ)

ب)

- إذا كان $m<0$ فالمعادلة $p(x)=m$ لا حل لها
- إذا كان $m=0$ فالمعادلة $f(x)=m$ لها 4 حلول بالظبط
- إذا كان $0<m<1$ فالمعادلة $f(x)=m$ لها 8 حلول بالظبط
- إذا كان $m=1$ فالمعادلة $f(x)=m$ لها 6 حلول بالظبط
- إذا كان $1<m<3$ فالمعادلة $f(x)=m$ لها 4 حلول بالظبط
- إذا كان $m=3$ فالمعادلة $f(x)=m$ لها 3 حلول بالظبط
- إذا كان $m>3$ فالمعادلة $f(x)=m$ لها حلان بالظبط.

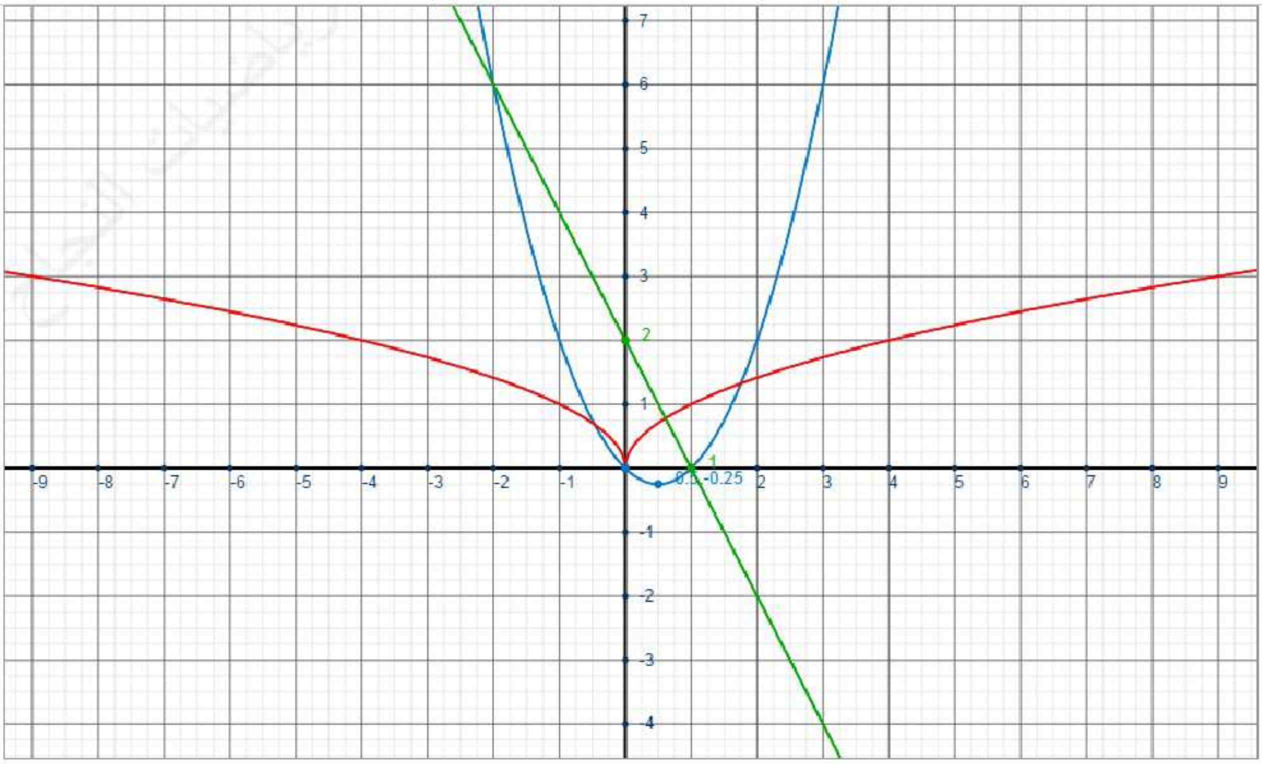
تمرين 3 : $f(x)=x^2-x$ و $g(x)=\sqrt{|x|}$ ، $(\Delta):\ y=-2x+2$

f عبارة عن دالة حدودية من الدرجة الثانية،
إذن تمثيلها المبياني عبارة عن شلجم رأسه :
$\frac{-b}{2a}=\frac{-(-1)}{2}=\frac{1}{2}$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$\frac{-1}{4}$	$\nearrow$

1 لدينا : $Dg=\{x\in IR/|x|\geq 0\}=IR$
و $\forall x\in IR\ \ g(-x)=\sqrt{|-x|}=\sqrt{|x|}=g(x)$
إذن : g دالة زوجية
من جهة أخرى : $\forall x\in IR^{+}\ \ g(x)=\sqrt{x}$
إذن جدول تغيراتها هو :

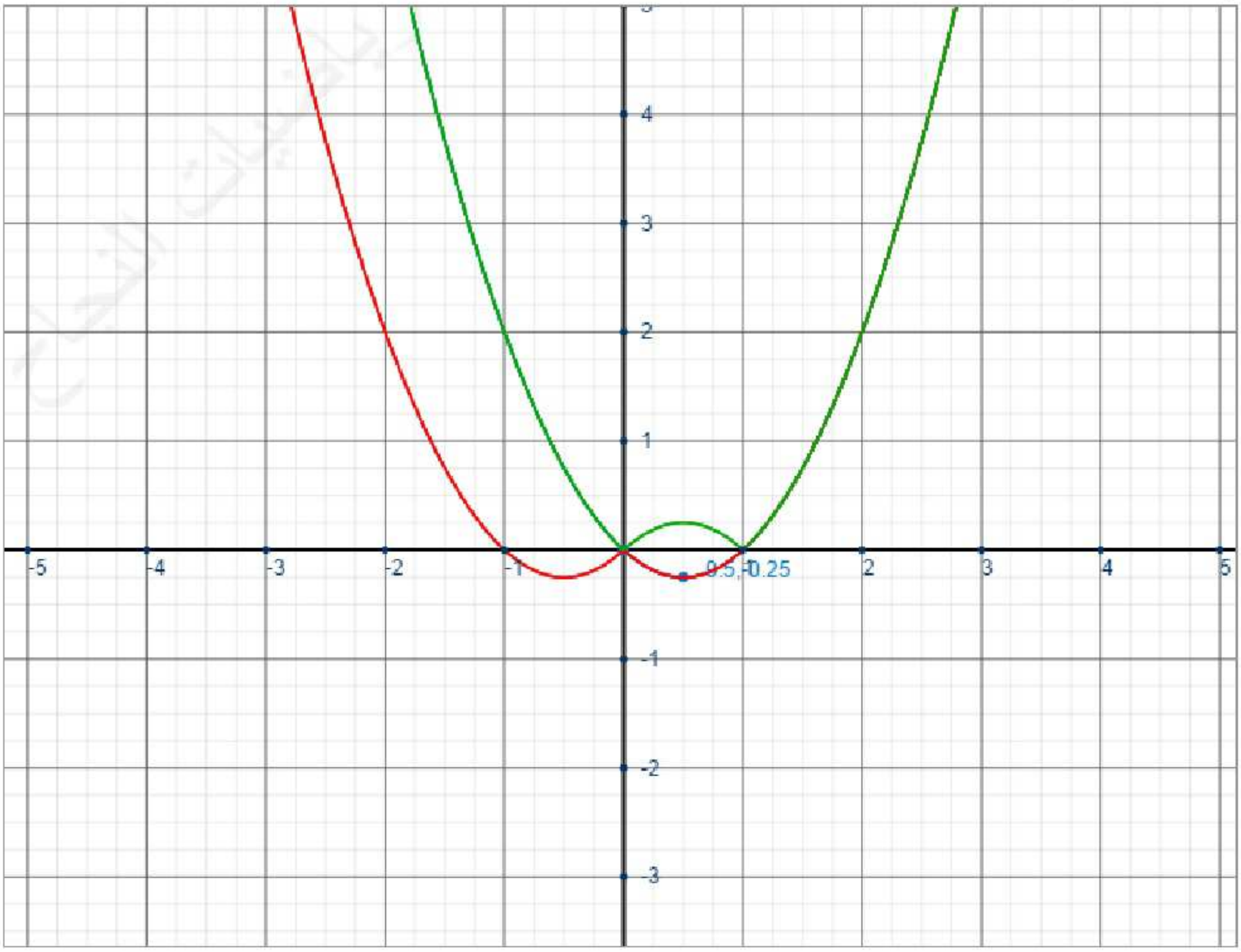
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

	2
المعادلة $\sqrt{\lvert x\rvert}+2x=2$ تكافئ $g(x)=-2x+2$ مبيانيا نجد أن Cg و (Δ) يتقاطعان في نقطة واحدة، إذن المعادلة السابقة تقبل حلا وحيدا.	3
لنحدد جبريا إحداثيتي نقط تقاطع (C_f) و (Δ) من أجل ذلك نحل المعادلة: $f(x)=-2x+2$ أي: $x^2-x=-2x+2$ أي: $x^2-x+2x-2=0$ أي $x^2+x-2=0$ ، لدينا: $\Delta=1+8=9$ منه: $x=\frac{-1+3}{2}=1$ أو $x=\frac{-1-3}{2}=-2$ إذن (C_f) و (Δ) يتقاطعان في النقطتين: $E(1,f(1))$ و $F(-2,f(-2))$ أي: $E(1,0)$ و $F(-2,6)$	4
مبيانيا نجد أن: ▪ حل المتراجحة $g(x)\leq 3$ هو: $S=[-9;9]$ ▪ حل المتراجحة $g(x)\geq 2$ هو: $S=]-\infty,-4]\cup[4,+\infty[$ ▪ حل المتراجحة $-2x+2<f(x)<2$ هو: $S=(]-\infty,-2]\cup[1,+\infty[)\cap[-1,2]=[1;2]$	5
$g\left(\left[0;\frac{1}{4}\right[\right)=\left[0;\frac{1}{2}\right[$ و $g\left(\left[\frac{1}{4};+\infty\right[\right)=\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ $f([-2;1])=\left[\frac{-1}{4};6\right]$ و $f([2;+\infty[)=[2;+\infty[$ و $f(]-\infty;0])=[0;+\infty[$	6
لدينا: $Dh=IR^+$ و $\forall x\in IR^+\ h(x)=x-\sqrt{x}=\left(\sqrt{x}\right)^2-\sqrt{x}=f\left(\sqrt{x}\right)=f(g(x))=f\circ g(x)$ رتابة الدالة h على $I=\left[0;\frac{1}{4}\right[$ ، لدينا: ▪ g تزايدية على I ▪ $g(I)=\left[0;\frac{1}{2}\right[$ و f تناقصية على $\left[0;\frac{1}{2}\right[$ إذن h تناقصية على $\left[0;\frac{1}{4}\right[$ رتابة الدالة h على $J=\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$ ، لدينا: ▪ g تزايدية على J ▪ $g(J)=\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ و f تزايدية على $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ إذن h تزايدية على $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$ صعوبة السؤال تكمن في إيجاد التقسيم المناسب للمجال $]0;+\infty[$ حتى يمكن تطبيق خاصية رتابة مركب دالتين	7

8

$k(x)$ دالة زوجية تساوي $f(x)$ على $[0;+\infty[$ (اللون الأحمر)

منحنى الدالة $p(x)$ يطابق منحنى الدالة f في المجال الذي تكون فيه موجبة ويماثله في الحالة الأخرى (اللون الأخضر)



9

- إذا كان $m < \frac{-1}{4}$ فالمعادلة $k(x)=m$ لا حل لها
- إذا كان $m = \frac{-1}{4}$ فالمعادلة $k(x)=m$ لها حلان بالضبط.
- إذا كان $\frac{-1}{4} < m < 0$ فالمعادلة $k(x)=m$ لها 4 حلول بالضبط
- إذا كان $m=0$ فالمعادلة $k(x)=m$ لها 3 حلول بالضبط
- إذا كان $m>0$ فالمعادلة $k(x)=m$ لها حلان بالضبط

تمرين 4 : $n \in IN^*$

1

- لدينا : $1<3<4$ منه $1<\sqrt{3}<2$ منه : $E(\sqrt{3})=1$
- لدينا : $4<7<9$ منه $2<\sqrt{7}<3$ منه $7<\sqrt{7}+5<8$ منه : $E(\sqrt{7}+5)=7$
- لدينا : $(\sqrt{2}+1)^2=3+\sqrt{8}$ و $2<\sqrt{8}<3$ منه $5<(\sqrt{2}+1)^2<6$ منه : $E\left((\sqrt{2}+1)^2\right)=5$
- لدينا : $n^2 \le n^2+n < n^2+2n+1$ منه : $n \le \sqrt{n^2+n} < n+1$ منه : $E\left(\sqrt{n^2+n}\right)=n$
- لدينا : $\frac{2n+1}{2n}=1+\frac{1}{2n}$ و : $0 \le \frac{1}{2n} < 1$ منه : $E\left(\frac{2n+1}{2n}\right)=1+E\left(\frac{1}{2n}\right)=1+0=1$
- لدينا : $\frac{2n+3}{n+1}=\frac{2n+2+1}{n+1}=2+\frac{1}{n+1}$ و : $0 \le \frac{1}{n+1} < 1$ منه : $E\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)=2+E\left(\frac{1}{n+1}\right)=2+0=2$
- لدينا : $\frac{n^2+2n+4}{n+1}=\frac{(n+1)^2+3}{n+1}=n+1+\frac{3}{n+1}$ منه : $E\left(\frac{n^2+2n+4}{n+1}\right)=n+1+E\left(\frac{3}{n+1}\right)$

	إذا كان $\frac{3}{n+1}<1$ (أي $n>2$) فإن : $E\left(\frac{n^2+2n+4}{n+1}\right)=n+1$ إذا كان : $n=2$ (لا توجد حالة أخرى لكون $n\in IN^*$) فإن: $E\left(\frac{n^2+2n+4}{n+1}\right)=3+E\left(\frac{3}{3}\right)=4$
	للتكير : إذا كان $p\le x<p+1$ حيث $p\in Z$ فإن: $E(x)=p$ $E(x+p)=p+E(x)$ لكل $x\in IR$ و لكل $p\in Z$ قد نظطر لدراسة الحالات في تعابير تتضمن بارامترا أو متغيرا.
2	▪ $3\le x<4 \Leftrightarrow E(x)=3$ بالتالي: $S=[3;4[$ ▪ $-2\le x<\frac{-5}{3} \Leftrightarrow -1\le 3x+5<0 \Leftrightarrow E(3x+5)=-1$ بالتالي: $S=\left[-2;\frac{-5}{3}\right[$ ▪ $E(x^2+5)=\frac{7}{4}\notin Z \Leftrightarrow 4E(x^2+5)=7$ بالتالي: $S=\phi$ $E\left(\frac{x+1}{2}\right)=\frac{x}{3} \Leftrightarrow \begin{cases}E\left(\frac{3k+1}{2}\right)=k\\k\in Z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k\le\frac{3k+1}{2}<k+1\\k\in Z\end{cases}$ ▪ نضع : $\frac{x}{3}=k$ فتصبح المعادلة تكافئ: $\Leftrightarrow \begin{cases}2k\le 3k+1<2k+2\\k\in Z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-1\le k<1\\k\in Z\end{cases}$ $\Leftrightarrow \quad k=0 \text{ ou } k=-1$ بالتالي : $S=\{0;-3\}$
3	▪ $x<5 \Leftrightarrow E(x)\le 4$ بالتالي : $S=]-\infty;5[$ ▪ $x<3 \Leftrightarrow E(x)\le 2 \Leftrightarrow E(x)\le 2{,}5 \Leftrightarrow 2E(x)\le 5$ بالتالي : $S=]-\infty;3[$ $x\ge 2 \Leftrightarrow E(x)\ge 2$ بالتالي : $S=[2;+\infty[$ ▪ $x\ge 3 \Leftrightarrow E(x)\ge 3 \Leftrightarrow E(x)\ge 2{,}5 \Leftrightarrow 2E(x)\ge 5$ بالتالي : $S=[3;+\infty[$ ▪ $-3\le x<\frac{10}{3} \Leftrightarrow -9\le 3x<10 \Leftrightarrow -9\le E(3x)\le 9 \Leftrightarrow -10<E(3x)<10 \Leftrightarrow \lvert E(3x)\rvert<10$ بالتالي : $S=\left[-3;\frac{10}{3}\right[$
	الهدف من التمرين التعريف بإحدى القواعد غير المعروفة : $E(x)\le p \Leftrightarrow x<p$ و $E(x)\ge p \Leftrightarrow x\ge p$ حيث $p\in Z$
تمرين 5 :	- مزيدا من التفكير -
1	حدد القيمة الدنوية المطلقة و القيمة المطلقة القصوية للدالة $f(x)=\frac{x}{x^2+x+1}$ أولا لدينا : $\forall x\in IR \ x^2+x+1>0$ لأن : $\Delta=-3<0$ و $a=1>0$ من جهة أخرى ، ليكن : $(\alpha,\beta)\in IR^2$ ، نعتبر العبارة $\forall x\in IR \ \alpha\le f(x)\le\beta \quad (P):$ $(P) \Leftrightarrow \forall x\in IR \ \alpha\le\frac{x}{x^2+x+1}\le\beta$ $(P) \Leftrightarrow \forall x\in IR \ \alpha x^2+\alpha x+\alpha\le x\le \beta x^2+\beta x+\beta$ لدينا : $(P) \Leftrightarrow \forall x\in IR \ \begin{cases}\alpha x^2+(\alpha-1)x+\alpha\le 0\\\beta x^2+(\beta-1)x+\beta\ge 0\end{cases}$

إذن لكي تتحقق العبارة (P) يكفي أن يكون : $\begin{cases}\alpha<0\\(\alpha-1)^2-4\alpha^2\le 0\end{cases}$ و $\begin{cases}\beta>0\\(\beta-1)^2-4\beta^2\le 0\end{cases}$

أي : $\begin{cases}\alpha<0\\-3\alpha^2-2\alpha+1\le 0\end{cases}$ و $\begin{cases}\beta>0\\-3\beta^2-2\beta+1\le 0\end{cases}$

لدينا محددة الحدودية $-3x^2-2x+1$ هي : $\Delta=4+12=16$ منه : $x_1=\dfrac{2+4}{-6}=-1$ و $x_1=\dfrac{2-4}{-6}=\dfrac{1}{3}$

منه : $-3x^2-2x+1\le 0 \Leftrightarrow x\ge\dfrac{1}{3}$ ou $x\le -1$ (باستعمال جدول الإشارات)

إذن لكي تتحقق العبارة (P) يكفي أن يكون : $\begin{cases}\alpha<0\\\alpha\ge\dfrac{1}{3}\text{ ou }\alpha\le-1\end{cases}$ و $\begin{cases}\beta>0\\\beta\ge\dfrac{1}{3}\text{ ou }\beta\le-1\end{cases}$

إذن يكفي أن نأخذ: $\alpha=\dfrac{1}{3}$ و $\beta=-1$

الآن نبرهن بسهولة أن : (P): $\forall x\in IR\ -1\le f(x)\le\dfrac{1}{3}$ (بحساب الفرق)

و أيضا : $f(1)=\dfrac{1}{3}$ و $f(-1)=-1$ وبذلك يكون : $\underset{x\in IR}{\text{Max}}\ f(x)=\dfrac{1}{3}$ و $\underset{x\in IR}{\text{Min}}\ f(x)=-1$

2

لنحل في IR المعادلة : $E(x^2)=(E(x))^2$

نضع: $E(x)=p$ منه $E(x^2)=p^2$ منه : $\begin{cases}p\le x<p+1\\p^2\le x^2<p^2+1\end{cases}$

إذا كان : $p<0$ فإن: $p\le-1$ منه $p+1\le 0$ منه : $\begin{cases}(p+1)^2<x^2\le p^2\\p^2\le x^2<p^2+1\end{cases}$ منه $p^2\le x^2\le p^2$ منه

$x^2=p^2$ منه : $x=p$ أو $x=-p$ ، عكسيا العددان p و $-p$ يحققان المعادلة.

إذا كان $p\ge 0$ فإن المعادلة تكافئ: $\begin{cases}x\ge 0\\p^2\le x^2<(p+1)^2\\p^2\le x^2<p^2+1\end{cases}$ تكافئ : $\begin{cases}x\ge 0\\p^2\le x^2<p^2+2p+1\\p^2\le x^2<p^2+1\end{cases}$

تكافئ $\begin{cases}x\ge 0\\p\le x^2<p^2+1\end{cases}$ (لأن: $p^2+1\le p^2+2p+1$ حيث أن : $x<p^2+1\Rightarrow x<p^2+2p+1$)

تكافئ: $p\le x<\sqrt{p^2+1}$

خلاصة : $S=\{p,-p\ /\ p\in IN^*\}\cup\left(\bigcup_{p\in IN}\left[p,\sqrt{p^2+1}\right[\right)=Z\cup\left(\bigcup_{p\in IN}\left[p,\sqrt{p^2+1}\right[\right)$

مجموعة الحلول هي عبارة عن اتحاد المجموعة Z و مجالات ، مثلا المجال $\left]3;\sqrt{10}\right[$ جزء من مجموعة الحلول

الرمز $\left(\bigcup_{p\in IN}\left[p,\sqrt{p^2+1}\right[\right)$ يرمز لاتحاد مجالات غير منتهية