تمرین 1

متن مکالمه زیر به چه معنی است؟

Was ist der Preis für eine Tasse Kaffee?

الف) چقدر قهوه می‌خواهید؟

ب) چقدر قهوه می‌خواهید؟

ج) چقدر قهوه می‌خواهید؟

د) چقدر قهوه می‌خواهید؟

گزینه ج

تمرین 2

متن مکالمه زیر به چه معنی است؟

Was kostet das Buch?

الف) کتاب چقدر است؟

ب) کتاب چقدر است؟

ج) کتاب چقدر است؟

د) کتاب چقدر است؟

گزینه ج

تمرین 3

متن مکالمه زیر به چه معنی است؟

Was kostet das Auto?

الف) ماشین چقدر است؟

ب) ماشین چقدر است؟

ج) ماشین چقدر است؟

د) ماشین چقدر است؟

گزینه ج

تمرین 4

متن مکالمه زیر به چه معنی است؟

Was kostet das Haus?

الف) خانه چقدر است؟

ب) خانه چقدر است؟

ج) خانه چقدر است؟

د) خانه چقدر است؟

گزینه ج

تمرین 5

متن مکالمه زیر به چه معنی است؟

Was kostet das Hemd?

الف) پیراهن چقدر است؟

ب) پیراهن چقدر است؟

ج) پیراهن چقدر است؟

د) پیراهن چقدر است؟

گزینه ج

تمرین 6

متن مکالمه زیر به چه معنی است؟

Was kostet das Kleid?

الف) لباس چقدر است؟

ب) لباس چقدر است؟

ج) لباس چقدر است؟

د) لباس چقدر است؟

گزینه ج

تمرین 7

متن مکالمه زیر به چه معنی است؟

Was kostet das Hemd?

الف) پیراهن چقدر است؟

ب) پیراهن چقدر است؟

ج) پیراهن چقدر است؟

د) پیراهن چقدر است؟

گزینه ج

تمرین 8

متن مکالمه زیر به چه معنی است؟

Was kostet das Kleid?

الف) لباس چقدر است؟

ب) لباس چقدر است؟

ج) لباس چقدر است؟

د) لباس چقدر است؟

گزینه ج

تمرین 9

متن مکالمه زیر به چه معنی است؟

Was kostet das Hemd?

الف) پیراهن چقدر است؟

ب) پیراهن چقدر است؟

ج) پیراهن چقدر است؟

د) پیراهن چقدر است؟

گزینه ج

تمرین 10

متن مکالمه زیر به چه معنی است؟

Was kostet das Kleid?

الف) لباس چقدر است؟

ب) لباس چقدر است؟

ج) لباس چقدر است؟

د) لباس چقدر است؟

گزینه ج

$$= \frac{2u_n^2 - 3u_n - 9}{u_n + 2}$$

$$= \frac{(u_n - 3)(2u_n + 3)}{u_n + 2}$$

بما أن $u_n > 3$

فإن $u_n - 3 > 0$ و $2u_n + 3 > 0$ و $u_n + 2 > 0$

ومنه فإن $\frac{(u_n - 3)(2u_n + 3)}{u_n + 2} > 0$

أي $u_{n+1} - 3 > 0$ أي $u_{n+1} > 3$

إذن $\boxed{\forall n \in IN \quad u_n > 3}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2} - u_n$$

$$= \frac{u_n^2 - 2u_n - 3}{u_n + 2}$$

$$= \frac{(u_n - 3)(u_n + 1)}{u_n + 2}$$

بما أن $u_n > 3$ فإن $u_n + 1 > 0$ و $u_n - 3 > 0$ و $u_n + 2 > 0$

ومنه فإن $\frac{(u_n - 3)(u_n + 1)}{u_n + 2} > 0$ أي $u_{n+1} - u_n > 0$

إذن $\boxed{\forall n \in IN \quad u_{n+1} > u_n}$

ومنه فإن (u_n) متتالية تزايدية.

3) أ- لدينا : $u_{n+1} - 3 = \frac{2u_n + 3}{u_n + 2}(u_n - 3)$

لنقارن $\frac{3}{2}$ و $\frac{2u_n + 3}{u_n + 2}$

$$\frac{2u_n + 3}{u_n + 2} - \frac{3}{2} = \frac{4u_n + 6 - 3u_n - 6}{2(u_n + 2)}$$

$$= \frac{u_n}{2(u_n + 2)} > 0$$

(لأن $u_n > 3$)

إذن : $\frac{2u_n + 3}{u_n + 2} > \frac{3}{2}$

وبما أن $u_n - 3 > 0$ فإن $\frac{2u_n + 3}{u_n + 2}(u_n - 3) > \frac{3}{2}(u_n - 3)$

أي $u_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(u_n - 3)$

إذن $\boxed{\forall n \in IN \quad ; \quad u_n - 3 > \frac{3}{2}(u_n - 3)}$

ب -

$$\begin{array}{ll} & \cancel{u_1 - 3} > \frac{3}{2}(u_0 - 3) > 0 \\ \times & \\ & \cancel{u_2 - 3} > \frac{3}{2}(\cancel{u_1 - 3}) > 0 \\ \times & \\ & \cancel{u_3 - 3} > \frac{3}{2}(\cancel{u_2 - 3}) > 0 \\ & \vdots \\ \times & u_n - 3 > \frac{3}{2}(\cancel{u_{n-1} - 3}) > 0 \end{array}$$

بضرب طرف بطرف وبعد الاختزال نحصل على :

$$u_n - 3 \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n (u_0 - 3)$$

أي : $u_n - 3 \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n$

إذن : $\boxed{\forall n \in IN \quad u_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3}$

ج - $\frac{3}{2} > 1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$$

8 التمرين 8

لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^3 + 2}{u_n^2 + 1} \quad ; \quad n \in IN \end{cases}$$

1) بين أن : $\forall n \in IN : \quad 0 < u_n < 2$

2) أدرس رتابة المتتالية (u_n).

4) أ- بين أن : $2 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(2 - u_n)$ لكل n من IN.

ب - استنتج أن : $\forall n \in IN \quad 0 < 2 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$

ج - واستنتج أنها متقاربة وأحسب $\lim_{n \to +\infty} u_n$

الحل

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^3 + 2}{u_n^2 + 1} \quad ; \quad n \in IN \end{cases}$$

1) لنبين أن $0 < u_n < 2$

لدينا $u_0 = 1$ إذن $0 < u_0 < 2$

نفترض أن $0 < u_n < 2$ من أجل n من IN

لنبين أن $0 < u_{n+1} < 2$

$u_n > 0 \Leftrightarrow u_n^3 + 2 > 0$ و $u_n^2 + 1 > 0$

$$\Rightarrow \frac{u_n^3 + 2}{u_n^2 + 1} > 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > 0 \qquad (1)$$

لدينا $2 - u_{n+1} = 2 - \frac{u_n^3 + 2}{u_n^2 + 1}$

$$= \frac{u_n^2(2 - u_n)}{u_n^2 + 1}$$

بما أن $0 < u_n < 2$ فإن $2 - u_n > 0$

و $u_n^2 > 0$ و $u_n^2 + 1 > 0$

ومنه فإن $\frac{u_n^2(2 - u_n)}{u_n^2 + 1} > 0$

أي $2 - u_{n+1} > 0$ أي $u_{n+1} < 2 \qquad (2)$

من (1) و (2) نستنتج أن $0 < u_{n+1} < 2$

إذن $\boxed{\forall n \in IN \quad 0 < u_n < 2}$

3) أ- لدينا $2 - u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n^2 + 1}(2 - u_n)$

لنقارن $\frac{u_n^2}{u_n^2 + 1}$ و $\frac{4}{5}$

$$\frac{u_n^2}{u_n^2 + 1} - \frac{4}{5} = \frac{u_n^2 - 4}{5(u_n^2 + 1)}$$

بما أن $0 < u_n < 2$ فإن $0 < u_n^2 < 4$

ومنه فإن $\frac{u_n^2 - 4}{5(u_n^2 + 1)} \leq 0$

وبالتالي فإن : $\boxed{\frac{u_n^2}{u_n^2 + 1} \leq \frac{4}{5}}$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{u_n^2}{u_n^2 + 1} < \frac{4}{5} \\ 2 - u_n > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{u_n^2}{u_n^2 + 1}(2 - u_n) \leq \frac{4}{5}(2 - u_n)$$

$$\Rightarrow 2 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(2 - u_n)$$

إذن : $\boxed{\forall n \in IN \quad 2 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(2 - u_n)}$

ب -

$$\begin{array}{ll} \times & 0 < \cancel{2 - u_1} \leq \frac{4}{5}(2 - u_0) \\ \times & 0 < \cancel{2 - u_2} \leq \frac{4}{5}(\cancel{2 - u_1}) \\ & \vdots \\ \times & 0 < 2 - u_n \leq \frac{4}{5}(\cancel{2 - u_{n-1}}) \end{array}$$

بضرب طرف بطرف وبعد الاختزال نحصل على ما يلي :

$$0 < 2 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n (2 - u_0)$$

وبما أن $u_0 = 1$ فإن : $\boxed{\forall n \in IN \quad ; \quad 0 < 2 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n}$

ج - $-1 < \frac{4}{5} < 1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$

إذن (u_n) متقاربة و $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 2}$

9 التمرين 9

خفر بئر بأخدودي المزارع اقترحت شركة الأمان الثالية :

ثمن حفر المتر الأول هو 100 درهم ويزيد ثمن كل متر ب 100 درهم على ثمن المتر السابق له. نرمز ب :

u_1 لثمن حفر المتر الأول (أي المتر من الرتبة 1).

u_2 لثمن حفر المتر الثاني (أي المتر من الرتبة 2).

u_n لثمن حفر المتر من الرتبة n.

1) أحسب u_2 و u_3.

2) حدد u_n بدلالة n واستنتج u_{15} (ثمن حفر المتر الخامس عشر).

3) كم مترا يمكن حفره إذا خصص صاحب المزرعة غلافا مالي قدره 82000 درهما لهذا الغرض ؟

الحل

1) لدينا $u_1 = 100$

$u_2 = u_1 + 100 = 200$ $\quad$ $u_3 = u_2 + 100 = 300$

2) بما أن $u_{n+1} = u_n + 100$

فإن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = 100$ وحدها الأول $u_1 = 100$.

إذن : $u_n = u_1 + (n - 1)r$

أي $\boxed{\forall n \in IN \quad ; \quad u_n = 100n}$

$u_{15} \doteq 100 . 15 = 1500$

3) لنحدد n حيث $u_1 + u_2 + ... + u_n = 82000$

لدينا (u_n) متتالية حسابية إذن :

أي : $u_1 + u_2 + ... + u_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$

إذن $u_1 + u_2 + ... + u_n = \frac{n(100 + 100n)}{2}$

أي $u_1 + u_2 + ... + u_n = 50n(n + 1)$

إذن $u_1 + u_2 + ... + u_n = 82000 \Leftrightarrow 5n(n + 1) = 82000$

$$\Leftrightarrow n^2 + n - 1640$$

إذن $\boxed{n = 40}$

$\Delta = 6561 = (81)^2$

إذن يبلغ 82000 درهما يمكن حفر 40 متر.

Moutamadris.ma