المخروطيات

1 المستوى $\mathcal{P}$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

نعتبر (Γ) مجموعة النقط $M(x,y)$ من $\mathcal{P}$ التي تحقق:

$$\frac{y^4}{16} = x^4 - 2x^2 + 1$$

1) بين أن (Γ) هو اتحاد مخروطيين (Γ_1) و (Γ_2).

2) حدد العناصر المميزة للمخروطيين (Γ_1) و (Γ_2).

3) أنشئ (Γ).

الجواب: 1) لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوى $\mathcal{P}$ لدينا:

$$M(x,y)\in(\Gamma) \Leftrightarrow (x^2-1)^2 - \left(\frac{y^2}{4}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+\frac{y^2}{4}-1\right)\left(x^2-\frac{y^2}{4}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+\frac{y^2}{4}-1=0 \quad \text{أو} \quad x^2-\frac{y^2}{4}-1=0$$

$$\Leftrightarrow M(x,y)\in(\Gamma_1)\cup(\Gamma_2)$$

www.learnit.66ghz.com

بحيث: $(\Gamma_1): x^2+\frac{y^2}{4}=1$ هذلول.

و $(\Gamma_2): x^2-\frac{y^2}{4}=1$ إهليلج.

وبالتالي: $(\Gamma) = (\Gamma_1)\cup(\Gamma_2)$

2) العناصر المميزة لـ إهليلج (Γ_1):

لدينا: $(\Gamma_1): \frac{x^2}{1^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$ حيث: $a=1$, $b=2$ و $b>a$

لدينا: $c^2=b^2-a^2=3$ إذن: $c=\sqrt{3}$

ومنه، والتباعد المركزي لـ (Γ_1) هو: $e=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

* البؤرتان لـ (Γ_1) هما: $F_1(0,c)$ و $F'_1(0,-c)$

أي: $F_1(0,\sqrt{3})$ و $F'_1(0,-\sqrt{3})$

* الدليلان لـ (Γ_1) هما: $(D_1): x=\frac{b^2}{c}$ و $(D'_1): x=-\frac{b^2}{c}$

أي: $(D_1): x=\frac{4}{\sqrt{3}}$ و $(D'_1): x=-\frac{4}{\sqrt{3}}$

* الرؤوس لـ (Γ_1) هي: $A(+1,0)$, $A'(-1,0)$ و $B(0;+2)$ و $B'(0,-2)$

Moutamadris.ma
www.learnit.66ghz.com

العناصر المميزة للهذلول (Γ_2) :

لدينا : $(\Gamma_2) : \frac{x^2}{1^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$ حيث : $a = 1$ و $b = 2$

لدينا : $c^2 = a^2 + b^2 = 5$ إذن : $c = \sqrt{5}$

ومنه : * التباعد المركزي لـ (Γ_2) هو : $e = \frac{c}{a} = \sqrt{5}$

* البؤرتان لـ (Γ_2) هما : $F_2(c, 0)$ و $F'_2(-c, 0)$

أي : $F_2(\sqrt{5}, 0)$ و $F'_2(-\sqrt{5}, 0)$

* الدليلان لـ (Γ_2) هما : $(D_2) : x = \frac{a^2}{c}$ و $(D'_2) : x = -\frac{a^2}{c}$

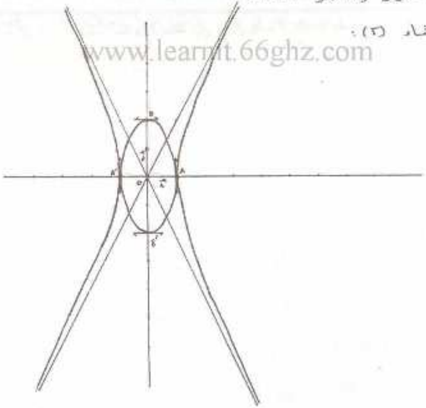
أي : $(D_2) : x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ و $(D'_2) : x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

* المقاربات لـ (Γ_2) هما : $(\Delta_2) : y = \frac{b}{a}x$ و $(\Delta'_2) : y = -\frac{b}{a}x$

أي : $(\Delta_2) : y = 2x$ و $(\Delta'_2) : y = -2x$

* مركز (Γ_2) هو $O(0, 0)$.

ج) إنشاء (Γ) :



www.learnit.66ghz.com

Moutamadris.ma
www.learnit.66ghz.com

2 المستوى $\mathcal{P}$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(x,y)$ التي تحقق : $y^2-2y-2x-1=0$

1) حدد طبيعة والعناصر لـ (Γ) .

2) اعط معادلة المماس (Γ) عند النقطة $A(1,3)$

3) بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته : $x+2y+1=0$ ، مماس لـ (Γ)

4) أنشئ (Γ).

الجواب : 1) لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوى $\mathcal{P}$

لدينا : $M(x,y)\in(\Gamma) \Leftrightarrow y^2-2y-2x-1=0$

$\Leftrightarrow (y-1)^2=2(x+1)$

نضع : $\begin{cases}X=x+1\\Y=y-1\end{cases}$ و $\Omega(-1,1)$

معادلة (Γ) في المعلم $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$ هي : $Y^2=2X$ $(p=1)$

ومنه : (Γ) شلجم بؤرته : $F(\frac{1}{2},0)$ بالنسبة للمعلم $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$

$F(-\frac{1}{2},1)$ بالنسبة للمعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$

www.learnit.66ghz.com

ودليله : $(D): X=-\frac{1}{2}$ بالنسبة للمعلم $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$

$(D): x=-\frac{3}{2}$ بالنسبة للمعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$

ورأسه $\Omega(-1,1)$.

2) ليكن (Δ_1) المماس لـ (Γ) عند النقطة $A(1,3)$.

لدينا : $A\in(\Gamma)$ إذن معادلة (Δ_1) في المعلم $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$

هي : $YY_0=p(X+X_0)$ أي : $2(y-1)=(x+1)+2$

ومنه : $(\Delta_1):\ y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

3) لنبين أن : $(\Delta): x+2y+1=0$ مماس لـ (Γ)

لتكن : $M(x,y)$ نقطة من المستوى $\mathcal{P}$

لدينا : $M(x,y)\in(\Gamma)\cap(\Delta) \Leftrightarrow \begin{cases}x+2y+1=0\\y^2-2y-2x-1=0\end{cases}$

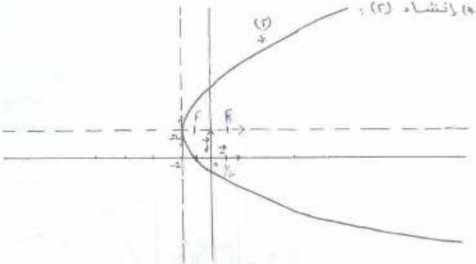
$\Leftrightarrow \begin{cases}x=-2y-1\\y^2+2y+1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}$

Moutamadris.ma
www.learnit.66ghz.com

ومنه : $(\Gamma) \cap (\Delta) = \{B(5,-5)\}$

وبالتالي : (Δ) مماس لـ (Γ) .

4) إنشاء (Γ) :



3

المستوى $(\mathcal{P})$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

www.learnit.66ghz.com

لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(x,y)$ من المستوى $(\mathcal{P})$ بحيث :

$$y^2 - 2y - 2|x| - 3 = 0$$

1) بين أن (Γ) هو اتحاد جزأين من شلجمين .

2) أنشئ (Γ) .

<u>الجواب :</u> 1) لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوى $(\mathcal{P})$

لدينا :
$$M(x,y) \in (\Gamma) \Leftrightarrow y^2 - 2y - 2|x| - 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ (y-1)^2 = 2(x+2) \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x \leq 0 \\ (y-1)^2 = -2(x-2) \end{cases}$$

نعتبر الشلجمين (P_1) و (P_2) بحيث :

$(P_1) : (y-1)^2 = 2(x+2)$

نضع : $\begin{cases} X = x+2 \\ Y = y-1 \end{cases}$ و $\Omega_1(-2,1)$

معادلة الشلجم (P_1) في المعلم $(\Omega_1,\vec{i},\vec{j})$ هي : $Y^2 = 2X$

$(P_2) : (y-1)^2 = -2(x-2)$

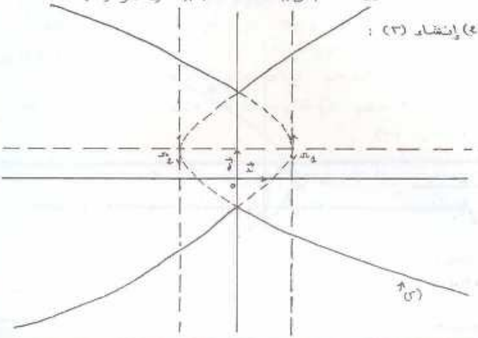
$\begin{cases} X = x-2 \\ Y = y-1 \end{cases}$ و $\Omega_2(2,1)$

معادلة (P_2) في المعلم $(\Omega_2,\vec{i},\vec{j})$ هي : $Y^2 = -2X$

Moutamadris.ma
www.learnit.66ghz.com

ومنه : (Γ) هو اتحاد جزئين من الشلجمين (P_1) و (P_2).

2) إنشاء (Γ) :



4

المستوى $(\mathcal{P})$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

www.learnit.66gliz.com

لتكن $(\mathcal{E}_m)$ مجموعة النقط $M(x, y)$ من المستوى $(\mathcal{P})$ بحيث :

$$4mx^2 + y^2 - 8x = 0 \qquad \text{حيث ، } m \in \mathbb{R}$$

1) حدد تبعاً لقيم m طبيعة $(\mathcal{E}_m)$.

2) أنشئ المنحنيين : $(\mathcal{E}_1)$ ، $(\mathcal{E}_{-1})$

<u>الجواب</u> : 1) لتكن $M(x, y)$ نقطة من المستوى $(\mathcal{P})$.

لدينا :

$$M(x, y) \in (\mathcal{E}_m) \Leftrightarrow 4mx^2 + y^2 - 8x = 0$$

* إذا كان : $m = 0$ فإن : $y^2 = 8x$

ومنه : $(\mathcal{E}_0)$ شلجم.

* إذا كان : $m \neq 0$ فإن :

$$M(x, y) \in (\mathcal{E}_m) \Leftrightarrow x^2 - \frac{2}{m}x + \frac{y^2}{4m} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{m}\right)^2 + \frac{y^2}{4m} = \frac{1}{m^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x - \frac{1}{m}\right)^2}{\left(\frac{1}{m}\right)^2} + \frac{y^2}{\frac{4}{m}} = 1$$

Moutamadris.ma
www.learnit.66gliz.com

* إذا كان: $m>0$ فإن: (C_m) إهليلج أو دائرة.
* إذا كان: $m<0$ فإن: (C_m) هذلول.

2) إنشاء المنحنيين: (C_1) ؛ (C_{-1}) :

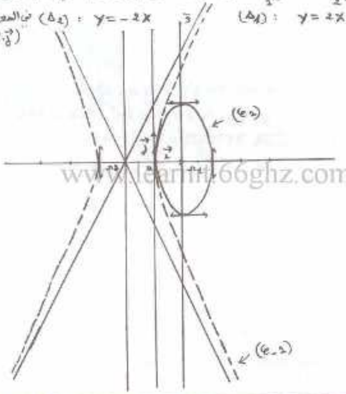
لدينا:

$(C_1) : \frac{(x-1)^2}{1^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$ إهليلج مركزه $\Omega_1(1,0)$ ورؤوسه.

$A(1,0)$, $A'(-1,0)$ ؛ $B(0,2)$ ؛ $B'(0,-2)$ في المعلم $(\Omega_1,\vec{i},\vec{j})$.

لدينا: $(C_{-1}) : \frac{(x+1)^2}{1^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$ هذلول مركزه $\Omega_2(-1,0)$ ومقارباته:

$(\Delta_1) : Y = 2X$ ؛ $(\Delta_2) : Y = -2X$ في المعلم $(\Omega_2,\vec{i},\vec{j})$



www.learnit.66ghz.com

5 المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

نعتبر المستقيم (D) الذي معادلته، $x = \frac{16}{3}$.

1) إعط معادلة ديكارتية للإهليلج (Γ) الذي دليله (D) وبؤرته النقطة O وتباعده المركزي $e = \frac{3}{5}$.

2) أنشئ (Γ)

Moutamadris.ma
www.learnit.66ghz.com

3) لتكن M نقطة من (Γ) ؛ نضع : $]-\pi;\pi[$ $\theta \equiv (\overrightarrow{i};\overrightarrow{OM})$

أ- بين أن : $OM = \dfrac{16}{5+3\cos\theta}$

ب- نفترض أن : $|\theta| < \frac{\pi}{2}$. المستقيم (OM) يقطع (D) في I و (Γ) في M'

أحسب : $\dfrac{1}{OM} + \dfrac{1}{OM'}$ و بين أن : $\dfrac{1}{OM} - \dfrac{1}{OM'} = \dfrac{2}{OI}$

<u>الجواب :</u> 1) لدينا الإهليلج : $(\Gamma) = \Gamma(O;(D);e)$

لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوى (P) لدينا :

$$M(x,y) \in (\Gamma) \Leftrightarrow \frac{MO}{d(M,(D))} = \frac{3}{5}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \frac{3}{5} \cdot \frac{|x-\frac{16}{3}|}{\sqrt{1^2+0^2}}$$
$$\Leftrightarrow 25(x^2+y^2) = 9(x-\frac{16}{3})^2$$
$$\Leftrightarrow 25x^2+25y^2 = 9x^2-96x+256$$
$$\Leftrightarrow 16(x+3)^2+25y^2 = 400$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x+3)^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$$

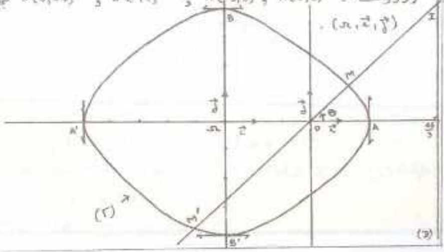
www.learnit.06gliz.com

ومنه معادلة الإهليلج (Γ) هي : $\dfrac{(x+3)^2}{5^2} + \dfrac{y^2}{4^2} = 1$

2) إنشاء الإهليلج (Γ).

لدينا : $(\Gamma) : \dfrac{(x+3)^2}{5^2} + \dfrac{y^2}{4^2} = 1$ مركزه $\Omega(-3,0)$

ورؤوسه : $A(5,0)$ ، $A'(-5,0)$ و $B(0,4)$ و $B'(0,-4)$ في المعلم $(\Omega,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.



Moutamadris.ma
www.learnit.06gliz.com

3) لدينا : $(\overline{\vec{i},\overrightarrow{OM}}) \equiv \theta \quad [2\pi]$ إذن : $\begin{cases} x = OM\cos\theta \\ y = OM\sin\theta \end{cases}$

ولدينا : $M \in (\Gamma) \iff OM = \frac{3}{5} d(M,D)$

$\iff OM = \frac{3}{5}\left| OM\cos\theta - \frac{16}{3} \right|$ ($(D): x=\frac{16}{3}$ لأن)

$\iff OM = \frac{3}{5}OM\cos\theta - \frac{16}{5}$ أو $OM = -\frac{3}{5}OM\cos\theta + \frac{16}{3}$

$\iff OM = \frac{-16}{5-3\cos\theta} < 0$ أو $OM = \frac{16}{5+3\cos\theta}$

غير ممكن

$M \in (\Gamma) \iff OM = \frac{16}{5+3\cos\theta}$

ب - لدينا : $(\overline{\vec{i},\overrightarrow{OM'}}) \equiv \theta + \pi \quad [2\pi]$

بما أن : $M' \in (\Gamma)$ فإن : $OM' = \frac{16}{5+3\cos(\pi+\theta)} = \frac{16}{5-3\cos\theta}$

ومنه : $\frac{1}{OM} + \frac{1}{OM'} = \frac{1}{16}(5+3\cos\theta) + \frac{1}{16}(5-3\cos\theta)$

إذن : $\frac{1}{OM} + \frac{1}{OM'} = \frac{5}{8}$

ولدينا : $\frac{1}{OM} - \frac{1}{OM'} = \frac{1}{16}(5+3\cos\theta) - \frac{1}{16}(5-3\cos\theta)$

www.learnit.6ogiz.com

إذن : $\frac{1}{OM} - \frac{1}{OM'} = \frac{3}{8}\cos\theta$

ولدينا : $\cos\theta = \frac{\frac{16}{3}}{OI}$ أي : $\cos\theta = \frac{16}{3} \times \frac{1}{OI}$

ومنه : $\frac{1}{OM} - \frac{1}{OM'} = \frac{3}{8} \times \frac{16}{3} \times \frac{1}{OI}$

وبالتالي : $\frac{1}{OM} - \frac{1}{OM'} = \frac{2}{OI}$

6 المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

نعتبر (Γ) مجموعة النقط $M(x,y)$ من (P) بحيث :

$$xy - x - y = 0$$

نعتبر النقطة $\Omega(1,1)$ و المتجهتين : $\vec{I} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i}+\vec{j})$ و $\vec{J} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i}-\vec{j})$

1) حدد معادلة ديكارتية المنحنى (Γ) في المعلم $(\Omega;\vec{I};\vec{J})$

2) حدد طبيعة والعناصر المميزة للمنحنى (Γ) في المعلم $(\Omega;\vec{I};\vec{J})$.

Moutamadris.ma
www.learnit.6ogiz.com