مُدمج الدوال اللوغاريتمية والأسية

السلسلة 1 (تمرينان)

التمرين الأول :

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x)=\ln\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)$

و ليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) تحقق أن لكل x من $\mathbb{R}$: $e^x-2\sqrt{e^x}+2=\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1$ ، ثم حدد D_f.

2) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثم حدد الفرع اللانهائي بجوار $-\infty$

3) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

4) تحقق أن لكل x من $\mathbb{R}$: $f(x)=x+\ln\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}\right)$ ثم بين أن (C_f) يقبل مقارب بجوار $+\infty$ يتم تحديده .

5) بين أن : $f'(x)=\dfrac{\sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x}-1\right)}{e^x-2\sqrt{e^x}+2}$ لكل x من $\mathbb{R}$ ، ثم أدرس تغيرات f وضع جدول تغيراتها .

6) بين أن : $f''(x)=\dfrac{-\sqrt{e^x}\left(\left(\sqrt{e^x}-2\right)^2-2\right)}{2\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)^2}$ لكل x من $\mathbb{R}$ ، ثم أدرس تقعر (C_f) و حدد نقط الإنعطاف إن وجدت.

7) مثل مبيانيا (C_f).

8) ناقش مبيانيا حسب قيم البارامتر m عدد حلول المعادلة : $e^x-e^m=2\left(-1+\sqrt{e^x}\right)$ $(x\in\mathbb{R})$

9) ليكن g قصور f على $[0,+\infty[$

أ. بين أن g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة من مجال J يتم تحديده

ب. حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J

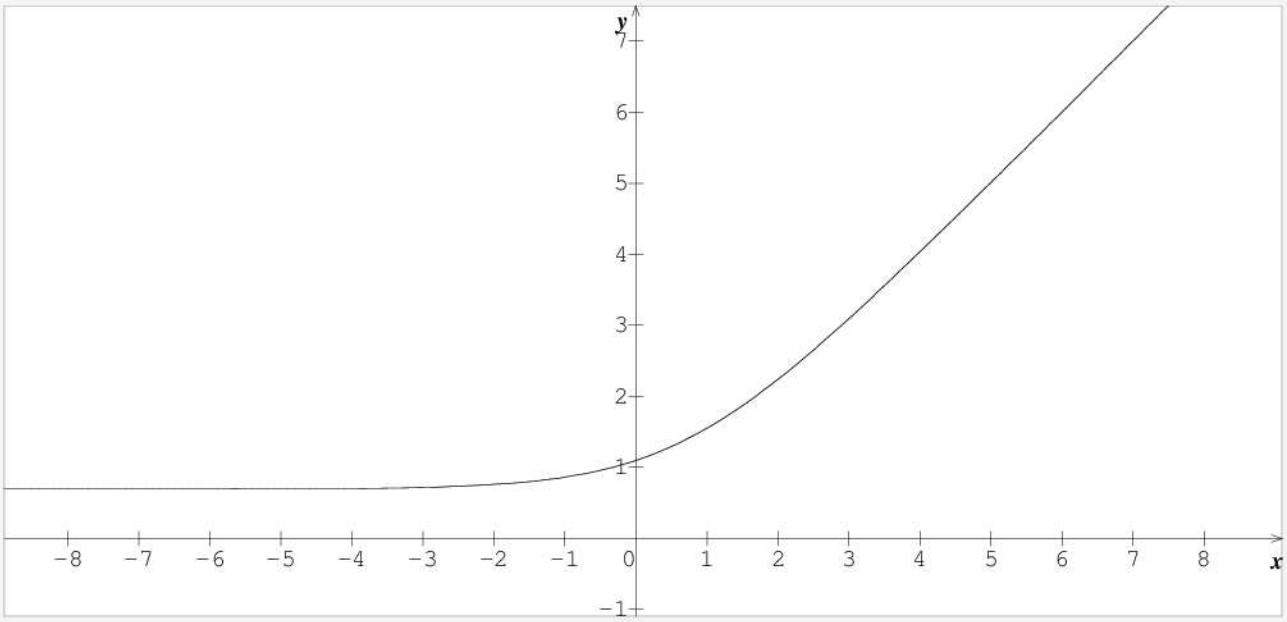
ج . مثل في نفس المعلم السابق وبلون مغاير $\left(C_{g^{-1}}\right)$

Moutamadris.ma

التمرين الثاني :

نعتبر الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $f(x)=\ln(e^x+2)$

و ليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$. (أنظر الشكل)



الجزء الأول

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و أول النتيجة هندسيا

2) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب- تحقق أن $f(x)=x+\ln(1+2e^{-x})$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم بين أن (C_f) يقبل مقارب مائل (Δ) معادلته $y=x$ بجوار $+\infty$

3) أدرس تغيرات f ثم ضع جدول تغيراتها

الجزء الثاني

نضع $I=\int_2^3 |f(x)-x|dx$

1) أدرس الوضع النسبي ل (C_f) و (Δ) و مثل (Δ) في الشكل أعلاه

2) اعط تأويلا هندسيا ل I

3) أ- بين أن لكل t من $[0,+\infty[$: $\ln(1+t)\le t$

ب- استنتج أن لكل x من $\mathbb{R}$: $\ln(1+2e^{-x})\le 2e^{-x}$

ج- بين أن : $0\le I\le \int_2^3 2e^{-x}dx$

د- أحسب $\int_2^3 2e^{-x}dx$ و استنتج تأطيرا ل I سعته $0,2$

Moutamadris.ma

تصحيح التمرين الأول

1) ليكن $x \in \mathbb{R}$:

لدينا : $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = \left(\sqrt{e^x}\right)^2 - 2\sqrt{e^x} + 1 + 1 = \left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2 + 1$

إذن : لكل x من $\mathbb{R}$: $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = \left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2 + 1$

من الواضح أن : $\left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2 + 1 > 0$ لكل x من $\mathbb{R}$

إذن

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{x \in \mathbb{R} / e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 > 0\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} / \left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2 + 1 > 0\right\} \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \ln\left(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2\right) = \ln 2$

لأن : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = 2$ و الدالة $\ln$ متصلة في 2.

<u>التأويل الهندسي :</u> (C_f) يقبل مقاربا أفقيا معادلته $y = \ln 2$ بجوار $-\infty$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2 + 1\right) = +\infty$

لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2 + 1 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$

Moutamadris.ma

4) ليكن $x \in \mathbb{R}$:

✓

$$f(x) = \ln\left(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2\right)$$
$$= \ln\left(e^x \times \left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right)\right)$$
$$= \ln\left(e^x\right) + \ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right)$$
$$= x + \ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right)$$

إذن : لكل x من $\mathbb{R}$: $f(x) = x + \ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right)$

✓ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right) = \ln 1 = 0$

لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right) = 1$ و الدالة $\ln$ متصلة في 1.

<u>التأويل الهندسي :</u> (C_f) يقبل مقاربا مائلا معادلته $y = x$ بجوار $+\infty$

Moutamadris.ma

5) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ (مركب دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 > 0$ لكل x من $\mathbb{R}$)

ليكن $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\ln\left(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2\right)\right)' \\ &= \frac{\left(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2\right)'}{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2} \\ &= \frac{e^x - 2.\frac{\left(e^x\right)'}{2\sqrt{e^x}}}{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2} \\ &= \frac{e^x - \frac{e^x}{\sqrt{e^x}}}{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2} \\ &= \frac{e^x - \sqrt{e^x}}{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2} \\ &= \frac{\sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x} - 1\right)}{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2} \end{aligned}$$

إذن : $f'(x) = \dfrac{\sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x} - 1\right)}{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2}$ لكل x من $\mathbb{R}$

لدينا : $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 > 0$ و $\sqrt{e^x} > 0$ لكل x من $\mathbb{R}$

إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $\sqrt{e^x} - 1$

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{e^x} - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow e^x = 1 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Moutamadris.ma

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\sqrt{(ex)}-1$	$-$	0	$+$

جدول تغيرات f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$ln2$ ↘	0	↗ $+\infty$

6) ليكن $x \in \mathbb{R}$:

$$f''(x) = \left(\frac{\sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x}-1\right)}{e^x-2\sqrt{e^x}+2}\right)'$$

$$= \left(\frac{e^x-\sqrt{e^x}}{e^x-2\sqrt{e^x}+2}\right)'$$

$$= \frac{\left(e^x-\sqrt{e^x}\right)'.\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)-\left(e^x-\sqrt{e^x}\right).\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)'}{\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)^2}$$

$$= \frac{\left(e^x-\frac{\sqrt{e^x}}{2}\right).\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)-\left(e^x-\sqrt{e^x}\right).\left(e^x-\sqrt{e^x}\right)}{\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)^2}$$

$$= \frac{e^{2x}-2e^x\sqrt{e^x}+2e^x-\frac{e^x\sqrt{e^x}}{2}+e^x-\sqrt{e^x}-e^{2x}+2\sqrt{e^x}e^x-e^x}{\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)^2}$$

$$= \frac{2e^x-\frac{e^x\sqrt{e^x}}{2}-\sqrt{e^x}}{\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{-\sqrt{e^x}}{2}\left(-4\sqrt{e^x}+e^x+2\right)}{2\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)^2} = \frac{-\sqrt{e^x}\left(\left(\sqrt{e^x}\right)^2-4\sqrt{e^x}+4-2\right)}{2\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)^2}$$

Moutamadris.ma

إذن : $f''(x)=\dfrac{-\sqrt{e^x}\left(\left(\sqrt{e^x}-2\right)^2-2\right)}{2\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)^2}$ لكل x من $\mathbb{R}$

لندرس تقعر (C_f) :

لدينا : $\sqrt{e^x}>0$ و $2\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)^2>0$ إذن إشارة $f''(x)$ هي إشارة $-\left(\left(\sqrt{e^x}-2\right)^2-2\right)$

x	$-\infty$		$2ln(2-\sqrt{(2)})$		$2ln(2+\sqrt{(2)})$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

على المجال $\left]-\infty,2\ln\left(2-\sqrt{2}\right)\right]$: $f''(x)\leq 0$ إذن (C_f) مقعر

على المجال $\left[2\ln\left(2-\sqrt{2}\right),2\ln\left(2+\sqrt{2}\right)\right]$: $f''(x)\geq 0$ إذن (C_f) محدب

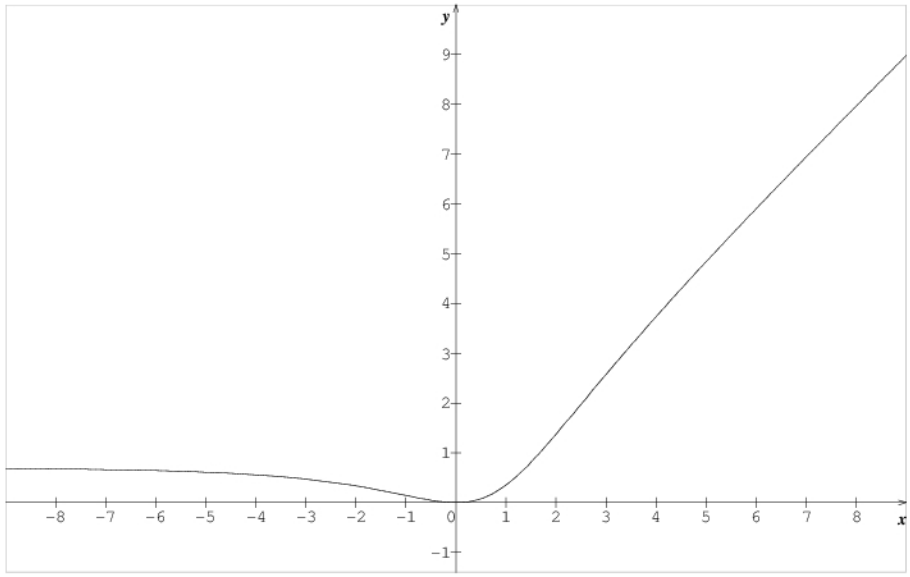
على المجال $\left[2\ln\left(2+\sqrt{2}\right),+\infty\right[$: $f''(x)\leq 0$ إذن (C_f) مقعر

و بما أن f'' تنعدم و تغير إشارتها عند $2\ln\left(2-\sqrt{2}\right)$ فإن النقطة $I\left(2\ln\left(2-\sqrt{2}\right),f\left(2\ln\left(2-\sqrt{2}\right)\right)\right)$ هي نقطة انعطاف

و كذلك f'' تنعدم و تغير إشارتها عند $2\ln\left(2+\sqrt{2}\right)$ فإن النقطة $J\left(2\ln\left(2+\sqrt{2}\right),f\left(2\ln\left(2+\sqrt{2}\right)\right)\right)$ هي نقطة انعطاف

7)

Moutamadris.ma



8) المعادلة $(x \in \mathbb{R})\quad e^x - e^m = 2\left(-1+\sqrt{e^x}\right)$ تكافئ $(x \in \mathbb{R})\quad e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = e^m$

تكافئ $(x \in \mathbb{R})\quad \ln\left(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2\right) = m$

تكافئ $(x \in \mathbb{R})\quad f(x) = m$

- ✓ إذا كان $m < 0$: المعادلة لا تقبل حلا
- ✓ إذا كان $m = 0$: المعادلة لها حلا وحيدا
- ✓ إذا كان $0 < m < \ln 2$: المعادلة تقبل حلين
- ✓ إذا كان $m \geq \ln 2$: المعادلة لها حلا وحيدا

9) أ- لدينا g متصلة و تزايدية قطعا على المجال $[0,+\infty[$ (لأن g قصور f على المجال $[0,+\infty[$)

إذن g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة من المجال $J = g\left([0,+\infty[\right) = [0,+\infty[$ نحو $[0,+\infty[$

ب- ليكن $x \in [0,+\infty[$:

Moutamadris.ma

$$y = g^{-1}(x) \qquad \Leftrightarrow x = g(y)$$

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\left(\sqrt{e^y} - 1\right)^2 + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow e^x = \left(\sqrt{e^y} - 1\right)^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow e^x - 1 = \left(\sqrt{e^y} - 1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left|\sqrt{e^y} - 1\right| = \sqrt{e^x - 1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{e^y} - 1 = \sqrt{e^x - 1}\,(y \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{e^y} = 1 + \sqrt{e^x - 1}$$

$$\Leftrightarrow e^y = \left(1 + \sqrt{e^x - 1}\right)^2$$

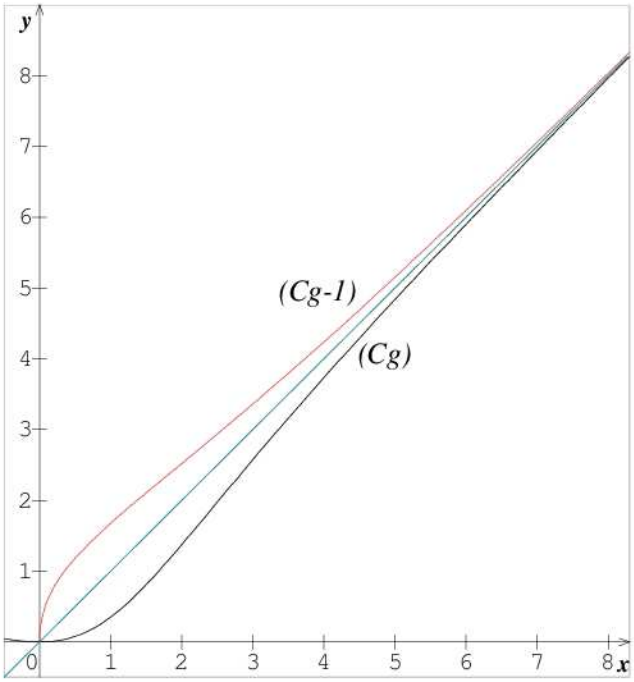
$$\Leftrightarrow y = \ln\left(\left(1 + \sqrt{e^x - 1}\right)^2\right)$$

$$\Leftrightarrow y = 2\ln\left(1 + \sqrt{e^x - 1}\right)$$

إذن لكل x من $[0,+\infty[$: $g^{-1}(x) = 2\ln\left(1 + \sqrt{e^x - 1}\right)$

ج-

Moutamadris.ma



تصحيح التمرين الثاني

Moutamadris.ma

الجزء الأول :

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(e^x+2\right) = \ln(2)$

لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x+2=2$ $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0\right)$ و الدالة $\ln$ متصلة في 2

التأويل الهندسي : (C_f) يقبل مقاربا أفقيا معادلته $y=\ln 2$ بجوار $-\infty$

2) أ- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(e^x+2\right) = +\infty$

لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} e^x+2=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty \end{cases}$

ب- ليكن $x\in\mathbb{R}$:

✓

$$f(x)=\ln\left(e^x+2\right)=\ln\left(e^x\left(1+\frac{2}{e^x}\right)\right)=\ln\left(e^x\right)+\ln\left(1+\frac{2}{e^x}\right)=x+\ln\left(1+2e^{-x}\right)$$

إذن : $f(x)=x+\ln\left(1+2e^{-x}\right)$ لكل x من $\mathbb{R}$

✓ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+2e^{-x}\right) = \lim\limits_{t\to-\infty} \ln\left(1+2e^t\right) = \ln(1)=0$

لأن : $\lim\limits_{t\to-\infty} 1+2e^t=1$ و الدالة $\ln$ متصلة في 1

التأويل الهندسي : (C_f) يقبل مقاربا مائلا معادلته $y=x$ بجوار $+\infty$

3) لندرس تغيرات الدالة f

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ (مركب دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $e^x+2>0$ لكل x من $\mathbb{R}$)

ليكن $x\in\mathbb{R}$:

$$f'(x)=\left(\ln\left(e^x+2\right)\right)'=\frac{\left(e^x+2\right)'}{e^x+2}=\frac{e^x}{e^x+2}$$

من الواضح أن $f'(x)>0$ $(e^x>0)$

إذن f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

جدول تغيرات f :

Moutamadris.ma

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$ln2 \nearrow +\infty$

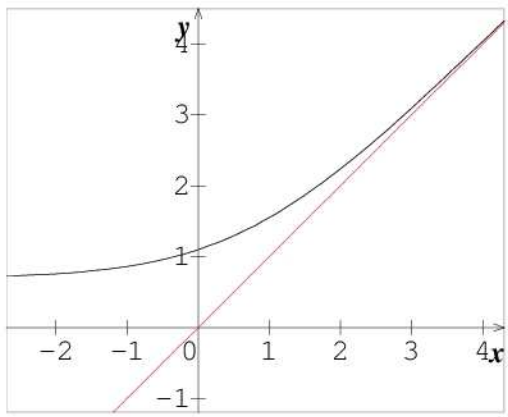
الجزء الثاني :

1) ليكن $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x)-x=\ln\left(1+2e^{-x}\right)$$

نعلم أن $2e^{-x}>0$ إذن $1+2e^{-x}>1$ إذن $\ln\left(1+2e^{-x}\right)>0$ إذن $f(x)-x>0$

و منه (C_f) يوجد فوق (Δ)



2) التكامل $I=\int_2^3\left|f(x)-x\right|dx$ هو مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$ و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=2$ و $x=3$

3) أ- لنبين أن لكل t من $[0,+\infty[$: $\ln(1+t)\le t$

نعتبر الدالة $u:t\mapsto \ln(1+t)-t$

$$u'(t)=\left(\ln(1+t)-t\right)'=\frac{1}{1+t}-1=\frac{1-1-t}{1+t}=\frac{-t}{1+t}$$

لدينا $t\ge 0$ إذن $\frac{-t}{1+t}\le 0$ إذن $u'(t)\le 0$ و منه الدالة u تناقصية

وبما أن $t\ge 0$ فإن $u(t)\le u(0)$

و بالتالي : $\ln(1+t)-t\le 0$

نستنتج أن لكل t من $[0,+\infty[$: $\ln(1+t)\le t$

ب- لدينا لكل t من $[0,+\infty[$: $\ln(1+t)\le t$

و بنا أن لكل x من $\mathbb{R}$: $2e^{-x}>0$

Moutamadris.ma

فلن : $\ln\left(1+2e^{-x}\right) \leq 2e^{-x}$

ج- لدينا : لكل x من $\mathbb{R}$: $0 \leq \ln\left(1+2e^{-x}\right) \leq 2e^{-x}$

إذن $0 \leq \int_2^3 \ln\left(1+2e^{-x}\right)dx \leq \int_2^3 2e^{-x}dx$

و منه $0 \leq I \leq \int_2^3 2e^{-x}dx$ $\quad (f(x)-x = \ln\left(1+2e^{-x}\right) > 0)$

د-

$$\int_2^3 2e^{-x}dx = 2\int_2^3 e^{-x}dx = 2\left[-e^{-x}\right]_2^3 = 2\left(e^{-2}-e^{-3}\right) \quad ✓$$

$$0 \leq I \leq 2\left(e^{-2}-e^{-3}\right) \quad ✓$$

$$0 \leq I \leq 2\left(e^{-2}-e^{-3}\right) \leq 0,2$$

و هذا تأطير سعته $0,2$

つづく

Moutamadris.ma

التمرين 1

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

(1) $\ln(2x-1) = -\frac{3}{5}$

(2) $\ln(x+1) = \ln(x^2+2)$

(3) $(\ln(1-x))^2 + 3\ln(1-x) - 4 = 0$

(4) $\log(x^2-3x) = 1$

الحل

أحل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

في كل ما يلي أرمز لمجموعة تعريف المعادلة بالرمز D.

(1) $(E): \ln(2x-1) = -\frac{3}{5}$

• أحدد D:

$(x\in D) \Leftrightarrow (2x-1>0)$
$\Leftrightarrow \left(x > \frac{1}{2}\right)$
$\Leftrightarrow \left(x \in \left]\frac{1}{2};+\infty\right[\right)$

إذن: $D = \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

• أحل في D المعادلة E:

$(E) \Leftrightarrow \left(\ln(2x-1) = -\frac{3}{5}\times 1 \text{ و } x\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[\right)$
$\Leftrightarrow \left(\ln(2x-1) = -\frac{3}{5}\ln(e) \text{ و } x\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[\right)$
$\Leftrightarrow \left(\ln(2x-1) = \ln\left(e^{-\frac{3}{5}}\right) \text{ و } x\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[\right)$
$\Leftrightarrow \left(2x-1 = e^{-\frac{3}{5}} \text{ و } x\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[\right)$
$\Leftrightarrow \left(x = \frac{1+e^{-\frac{3}{5}}}{2} \text{ و } x\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[\right)$

وبما أن $\frac{1+e^{-\frac{3}{5}}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{e^{-\frac{3}{5}}}{2} > \frac{1}{2}$

فإن مجموعة حلول المعادلة (E) هي: $S = \left\{\frac{1+e^{-\frac{3}{5}}}{2}\right\}$

> لا تنسى أن: $\ln(e) = 1$. $\ln(x^r) = r\ln(x)$ لكل x من $]0;+\infty[$ و r من Q. $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$ لكل x و y من $]0;+\infty[$.

(2) $(E): \ln(x+1) = \ln(x^2+2)$

• أحدد D:

$(x\in D) \Leftrightarrow (x+1>0 \text{ و } x^2+2>0)$
$\Leftrightarrow (x>-1 \text{ و } x^2+2>0)$
$\Leftrightarrow (x>-1)$ (لأن $x^2+2>0$ عبارة صحيحة لكل x من $\mathbb{R}$)
$\Leftrightarrow (x\in]-1;+\infty[)$

إذن: $D =]-1;+\infty[$

• أحل في D المعادلة (E):

$(E) \Leftrightarrow (\ln(x+1) = \ln(x^2+2) \text{ و } x\in]-1;+\infty[)$
$\Leftrightarrow (x^2+2 = x+1 \text{ و } x\in]-1;+\infty[)$
$\Leftrightarrow (x^2-x+1 = 0 \text{ و } x\in]-1;+\infty[)$

ولدينا: $\Delta = -3 < 0$ مميز المعادلة $x^2-x+1=0$ إذن: المعادلة $x^2-x+1=0$ لا تقبل حلا في $\mathbb{R}$

ومنه المعادلة (E) لا تقبل حلا في $D =]-1;+\infty[$

إذن مجموعة حلولها هي: $S = \varnothing$

(3) $(E): (\ln(1-x))^2 + 3\ln(1-x) - 4 = 0$

• أحدد D:

$(x\in D) \Leftrightarrow (1-x>0)$
$\Leftrightarrow (x<1)$
$\Leftrightarrow (x\in]-\infty;1[)$

إذن: $D =]-\infty;1[$

• أحل في D المعادلة (E):

أضع: $t = \ln(1-x)$ لكل $x\in D$.

$(E) \Leftrightarrow (t^2+3t-4 = 0 \text{ و } x\in]-\infty;1[)$
$\Leftrightarrow ((t-1)(t+4) = 0 \text{ و } x\in]-\infty;1[)$
$\Leftrightarrow ((t=1 \text{ أو } t=-4) \text{ و } x\in]-\infty;1[)$
$\Leftrightarrow ((\ln(1-x)=1 \text{ أو } \ln(1-x)=-4) \text{ و } x\in]-\infty;1[)$
$\Leftrightarrow ((\ln(1-x)=\ln(e) \text{ أو } \ln(1-x)=-4\ln(e)) \text{ و } x\in]-\infty;1[)$
$\Leftrightarrow ((\ln(1-x)=\ln(e) \text{ أو } \ln(1-x)=\ln(e^{-4})) \text{ و } x\in]-\infty;1[)$
$\Leftrightarrow ((1-x=e \text{ أو } 1-x=e^{-4}) \text{ و } x\in]-\infty;1[)$
$\Leftrightarrow ((x=1-e \text{ أو } x=1-e^{-4}) \text{ و } x\in]-\infty;1[)$

وبما أن: $1-e^{-4}<1$ و $1-e<1$ فإن $1-e^{-4}\in D$ و $1-e\in D$

أي: مجموعة حلول المعادلة (E) هي: $S = \{1-e; 1-e^{-4}\}$

(4) $(E): \log(x^2-3x) = 1$

• أحدد D:

$(x\in D) \Leftrightarrow (x^2-3x>0)$
$\Leftrightarrow (x\in]-\infty;0[\cup]3;+\infty[)$

إذن: $D =]-\infty,0[\cup]3,+\infty[$

لأن:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
x^2-3x		+	0	−	0	+	

> لا تنسى أن: log رمز لدالة اللوغاريتم العشري $(\forall x\in]0;+\infty[): \log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$. $\log(10) = 1$. $\log x^r = r\log x$ لكل x من $]0;+\infty[$ و r من Q.

• أحل في D المعادلة (E):

$(E) \Leftrightarrow (\log(x^2-3x) = \log(10) \text{ و } x\in D)$
$\Leftrightarrow (x^2-3x = 10 \text{ و } x\in D)$
$\Leftrightarrow (x^2-3x-10 = 0 \text{ و } x\in D)$
$\Leftrightarrow ((x-5)(x+2) = 0 \text{ و } x\in D)$
$\Leftrightarrow ((x=5 \text{ أو } x=-2) \text{ و } x\in D)$

وبما أن $5\in D$ و $-2\in D$ فإن مجموعة حلول المعادلة هي: $S = \{5, -2\}$

التمرين 2

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

(1) $\ln(3-2x) \geq \frac{1}{2}$

(2) $\ln(x^2-6) < \ln(5x)$

(3) $(\ln(x))^2 - 2\ln(x) < 3$

(4) $\log_{\frac{3}{5}}(x+1) > -2$

(5) $\log_{\sqrt{2}}(2x+4) \leq 4$

الحل

أحل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

في كل ما يلي أرمز لمجموعة تعريف المتراجحة بالرمز D.

(1) $:\ln(3-2x) \geq \frac{1}{2}$

• أحدد D:

$(x\in D) \Leftrightarrow (3-2x>0)$
$\Leftrightarrow \left(x<\frac{3}{2}\right)$
$\Leftrightarrow \left(x\in\left]-\infty;\frac{3}{2}\right[\right)$

إذن: $D = \left]-\infty;\frac{3}{2}\right[$

• أحل في D المتراجحة:

$\left(\ln(3-2x) \geq \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \left(x\in D \text{ و } \ln(3-2x) \geq \frac{1}{2}\ln(e)\right)$
$\Leftrightarrow \left(x\in D \text{ و } \ln(3-2x) \geq \ln\sqrt{e}\right)$
$\Leftrightarrow \left(x\in D \text{ و } 3-2x \geq \sqrt{e}\right)$
$\Leftrightarrow \left(x\in D \text{ و } x \leq \frac{3-\sqrt{e}}{2}\right)$
$\Leftrightarrow \left(x<\frac{3}{2} \text{ و } x \leq \frac{3-\sqrt{e}}{2}\right)$
$\Leftrightarrow \left(x \leq \frac{3-\sqrt{e}}{2}\right)$
$\Leftrightarrow \left(x\in\left]-\infty;\frac{3-\sqrt{e}}{2}\right]\right)$

> لا تنسى أن: $\frac{1}{2}\ln(x) = \ln(\sqrt{x})$. $(\ln(x) \leq \ln(y)) \Leftrightarrow (x\leq y)$ لكل x و y من $]0,+\infty[$

إذن مجموعة حلول المتراجحة هي: $S = \left]-\infty;\frac{3-\sqrt{e}}{2}\right]$

(2) $:\ln(x^2-6) < \ln(5x)$

• أحدد D:

> لا تنسى أن: $x\in A\cap B \Leftrightarrow x\in A$ و $x\in B$

$(x\in D) \Leftrightarrow (x^2-6>0 \text{ و } 5x>0)$
$\Leftrightarrow (x\in]-\infty;-\sqrt{6}[\cup]\sqrt{6};+\infty[\text{ و } x\in]0;+\infty[)$
$\Leftrightarrow (x\in(]-\infty;-\sqrt{6}[\cup]\sqrt{6};+\infty[)\cap]0;+\infty[)$
$\Leftrightarrow (x\in]\sqrt{6};+\infty[)$

x	$-\infty$		$-\sqrt{6}$		$\sqrt{6}$		$+\infty$
x^2-6		+	0	−	0	+	

إذن: $D =]\sqrt{6};+\infty[$

• أحل في D المتراجحة:

$(\ln(x^2-6) < \ln(5x)) \Leftrightarrow (x\in]\sqrt{6};+\infty[\text{ و } x^2-6<5x)$
$\Leftrightarrow (x\in]\sqrt{6};+\infty[\text{ و } x^2-5x-6<0)$
$\Leftrightarrow (x\in]\sqrt{6};+\infty[\text{ و } x\in]-1;6[)$
$\Leftrightarrow (x\in]\sqrt{6};+\infty[\cap]-1;6[)$
$\Leftrightarrow (x\in]\sqrt{6};6[)$

جدول إشارة: x^2-5x-6

x	$-\infty$		-1		6		$+\infty$
x^2-5x-6		+	0	−	0	+	

إذن مجموعة حلول المتراجحة هي: $S =]\sqrt{6};6[$

(3) $:(\ln(x))^2 - 2\ln(x) < 3$

مجموعة تعريف هذه المتراجحة هي: $D =]0;+\infty[$

• أحل في D هذه المتراجحة:

$((\ln(x))^2 - 2\ln(x) < 3) \Leftrightarrow (x\in D \text{ و } (\ln x)^2 - 2\ln x - 3 < 0)$

أضع: $t = \ln x$ إذن:

$((\ln(x))^2 - 2\ln(x) < 3) \Leftrightarrow (x\in D \text{ و } t^2-2t-3<0)$
$\Leftrightarrow (x\in D \text{ و } -1<t<3)$
$\Leftrightarrow (x\in D \text{ و } -1<\ln x<3)$
$\Leftrightarrow (x\in D \text{ و } (-1)\ln e<\ln x<3\ln e)$ (لأن $\ln e = 1$)
$\Leftrightarrow (x\in]0;+\infty[\text{ و } \ln(e^{-1})<\ln x<\ln(e^3))$
$\Leftrightarrow (x\in]0;+\infty[\text{ و } e^{-1}<x<e^3)$
$\Leftrightarrow (x\in]0;+\infty[\text{ و } x\in]e^{-1};e^3[)$
$\Leftrightarrow (x\in]0;+\infty[\cap]e^{-1};e^3[)$
$\Leftrightarrow (x\in]e^{-1};e^3[)$

> لا تنسى أن: $\ln y < \ln x < \ln z \Leftrightarrow y<x<z$

إذن: $S =]e^{-1};e^3[$

(4) $:\log_{\frac{3}{5}}(x+1) > -2$

• أحدد D:

$(x\in D) \Leftrightarrow (x+1>0)$
$\Leftrightarrow (x>-1)$
$\Leftrightarrow (x\in]-1,+\infty[)$

إذن: $D =]-1;+\infty[$

> لا تنسى أن: مجموعة تعريف الدالة اللوغاريتم للأساس a هي $]0,+\infty[$ $(a\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\})$

• أحل في D المتراجحة:

$\left(\log_{\frac{3}{5}}(x+1) > -2\right) \Leftrightarrow \left(x\in D \text{ و } \log_{\frac{3}{5}}(x+1) > -2\log_{\frac{3}{5}}\left(\frac{3}{5}\right)\right)$
$\Leftrightarrow \left(x\in D \text{ و } \log_{\frac{3}{5}}(x+1) > \log_{\frac{3}{5}}\left(\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}\right)\right)$
$\Leftrightarrow \left(x\in D \text{ و } x+1 < \left(\frac{3}{5}\right)^{-2}\right)$ (لأن $0<\frac{3}{5}<1$)
$\Leftrightarrow \left(x\in D \text{ و } x < \frac{25}{9}-1\right)$
$\Leftrightarrow \left(x\in]-1;+\infty[\text{ و } x<\frac{16}{9}\right)$
$\Leftrightarrow \left(x\in]-1;+\infty[\text{ و } x\in\left]-\infty;\frac{16}{9}\right[\right)$
$\Leftrightarrow \left(x\in]-1;+\infty[\cap\left]-\infty;\frac{16}{9}\right[\right)$
$\Leftrightarrow \left(x\in\left]-1;\frac{16}{9}\right[\right)$

> لا تنسى أن: $\log_a(a) = 1$. $0<a<1$: $x<y \Leftrightarrow \log_a(x) > \log_a(y)$ لكل x و y من $]0;+\infty[$

إذن مجموعة حلول المتراجحة هي: $S = \left]-1;\frac{16}{9}\right[$

(5) $:\log_{\sqrt{2}}(2x+4) \leq 4$

• أحدد D:

$(x\in D) \Leftrightarrow (2x+4>0)$
$\Leftrightarrow (x>-2)$
$\Leftrightarrow (x\in]-2,+\infty[)$

$D =]-2,+\infty[$

• أحل في D المتراجحة:

$(\log_{\sqrt{2}}(2x+4) \leq 4) \Leftrightarrow (x\in D \text{ و } \log_{\sqrt{2}}(2x+4) \leq \log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2}^4))$
$\Leftrightarrow (x\in D \text{ و } 2x+4 \leq \sqrt{2}^4)$
$\Leftrightarrow (x\in]-2,+\infty[\text{ و } x\leq 0)$
$\Leftrightarrow (x\in]-2,+\infty[\text{ و } x\in]-\infty;0])$
$\Leftrightarrow (x\in]-2,+\infty[\cap]-\infty;0])$
$\Leftrightarrow (x\in]-2,0])$

> لا تنسى أن: $a>1$: $\log_a(x) \leq \log_a(y) \Leftrightarrow x\leq y$ لكل x و y من $]0;+\infty[$

إذن مجموعة حلول المتراجحة هي: $S =]-2,0]$

التمرين 3

حل في $\mathbb{R}^2$ النظمة: $\begin{cases} 3\ln(x-1) - 4\ln(y+1) = 1 \\ 2\ln(x-1) + \ln(y+1) = -2 \end{cases}$

الحل

أحل في $\mathbb{R}^2$ النظمة التالية:

$(\alpha): \begin{cases} 3\ln(x-1) - 4\ln(y+1) = 1 \\ 2\ln(x-1) + \ln(y+1) = -2 \end{cases}$

مجموعة تعريف النظمة (α) هي: $D =]1,+\infty[\times]-1,+\infty[$

لكل $(x,y)\in D$ أضع: $X = \ln(x-1)$ و $Y = \ln(y+1)$

إذن:

$(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} 3X-4Y = 1 \\ 2X+Y = -2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (3X-4Y)+4(2X+Y) = 1+4\times(-2) \\ 2(3X-4Y)-3(2X+Y) = 2\times1-3\times(-2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 11X = -7 \\ -11Y = 8 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} X = -\frac{7}{11} \\ Y = -\frac{8}{11} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x-1) = -\frac{7}{11} \\ \ln(y+1) = -\frac{8}{11} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x-1) = \ln\left(e^{-\frac{7}{11}}\right) \\ \ln(y+1) = \ln\left(e^{-\frac{8}{11}}\right) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = e^{-\frac{7}{11}} \\ y+1 = e^{-\frac{8}{11}} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+e^{-\frac{7}{11}} \\ y = -1+e^{-\frac{8}{11}} \end{cases}$

وبما أن $1+e^{-\frac{7}{11}} > 1$ و $-1+e^{-\frac{8}{11}} > -1$

فإن مجموعة حلول النظمة هي: $S = \left\{\left(1+e^{-\frac{7}{11}}; -1+e^{-\frac{8}{11}}\right)\right\}$

التمرين 4

بسط التعابير التالية:

(1) $A = \ln\left(e^2\sqrt[5]{e^{-3}}\right) + \ln\left(\left(\frac{\sqrt{e}}{\sqrt[3]{e^2}}\right)^5\right)$

(2) $B = \log(0{,}00001) - 2\log 10^4 + \log\left(\frac{10^{10}}{0{,}001}\right)$

(3) $C = (\log_2 3)(\log_3 4) - \left(\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}\right)\left(\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{9}\right)$

الحل

(1) $A = \ln\left(e^2\sqrt[5]{e^{-3}}\right) + \ln\left(\left(\frac{\sqrt{e}}{\sqrt[3]{e^2}}\right)^5\right)$

لدينا: $\sqrt[3]{e^2} = e^{\frac{2}{3}}$ و $\sqrt[5]{e^{-3}} = e^{-\frac{3}{5}}$

إذن: $A = \ln(e^2) + \ln\left(e^{-\frac{3}{5}}\right) + 5\ln\left(\frac{e^{\frac{1}{2}}}{e^{\frac{2}{3}}}\right)$

$= 2\ln e - \frac{3}{5}\ln e + 5\left(\ln e^{\frac{1}{2}} - \ln e^{\frac{2}{3}}\right)$

$= 2 - \frac{3}{5} + 5\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right)$

ومنه: $A = \frac{17}{30}$

(2) $B = \log(0{,}00001) - 2\log 10^4 + \log\left(\frac{10^{10}}{0{,}001}\right)$

لدينا: $0{,}00001 = 10^{-5}$ و $0{,}001 = 10^{-3}$

إذن: $B = \log(10^{-5}) - 2\log(10^4) + \log\left(\frac{10^{10}}{10^{-3}}\right)$

$= -5 - 2\times4 + \log(10^{10}) - \log(10^{-3})$

$= -5 - 8 + 10 + 3 = 0$

> لا تنسى أن: $\log(10^r) = r$ لكل r من Q

(3) $C = (\log_2 3)(\log_3 4) - \left(\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}\right)\left(\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{9}\right)$

أعلم أن لكل x من $]0;+\infty[$ و a من $\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$ لدينا: $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$

إذن: $C = \left(\frac{\ln 3}{\ln 2}\right)\times\left(\frac{\ln 4}{\ln 3}\right) - \left(\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}\right)\times\left(\frac{\ln\left(\frac{1}{9}\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}\right)$

$= \frac{\ln 4}{\ln 2} - \frac{\ln\left(\frac{1}{9}\right)}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}$

$= \frac{\ln(2^2)}{\ln 2} - \left(\frac{-\ln 9}{-\ln 3}\right)$ (لأن $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$)

$= \frac{2\ln 2}{\ln 2} - \frac{2\ln 3}{\ln 3}$

$= 2 - 2 = 0$

إذن: $C = 0$

التمرين 5

أحسب النهايات التالية:

(1) $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\sqrt{\frac{x^2+1}{2x^2-1}}\right)$

(2) $\lim_{x\to+\infty} \ln(x+1) - (x+1)^3$

(3) $\lim_{x\to1} \frac{x^2-1}{x\ln x}$

(4) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+x)}{x^5}$

الحل

أحسب النهايات التالية:

(1) $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\sqrt{\frac{x^2+1}{2x^2-1}}\right)$

لدينا: $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{2x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$

وبما أن الدالة $x\mapsto\sqrt{x}$ متصلة في النقطة $\frac{1}{2}$ فإن: $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2+1}{2x^2-1}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$

ونعلم أن الدالة $x\mapsto\ln x$ متصلة في $\sqrt{\frac{1}{2}}$ إذن:

$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\sqrt{\frac{x^2+1}{2x^2-1}}\right) = \ln\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\ln 2}{2}$

> لا تنسى: إذا كانت $\lim g(x) = l \geq 0$ فإن: $\lim\sqrt{g(x)} = \sqrt{l}$. إذا كانت $\lim g(x) = l$ و f دالة متصلة في l فإن: $\lim f(g(x)) = f(l)$. ln متصلة على $]0;+\infty[$

(2) $\lim_{x\to+\infty} \ln(x+1) - (x+1)^3 = \lim_{x\to+\infty} (x+1)^3\left(\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^3} - 1\right)$

أضع: $t = x+1$

إذن: $(x\to+\infty) \Rightarrow (t\to+\infty)$

إذن: $\lim_{x\to+\infty} \ln(x+1) - (x+1)^3 = \lim_{t\to+\infty} t^3\left(\frac{\ln(t)}{t^3} - 1\right) = -\infty$

لأن $\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln(t)}{t^3} = 0$ ومن $\lim_{t\to+\infty} t^3 = +\infty$

أستنتج أن $\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{\ln(t)}{t^3} - 1\right) = -1$

> لا تنسى: $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ لكل n من $\mathbb{N}^*$

(3) $\lim_{x\to1} \frac{x^2-1}{x\ln x} = \lim_{x\to1} \frac{(x+1)(x-1)}{x\ln x} = \lim_{x\to1} \frac{x+1}{x}\times\frac{x-1}{\ln x}$

من $\lim_{x\to1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$ أستنتج أن $\lim_{x\to1} \frac{x-1}{\ln x} = 1$

ولدينا: $\lim_{x\to1} \frac{x+1}{x} = 2$

إذن: $\lim_{x\to1} \frac{x^2-1}{x\ln x} = 2$

> لا تنسى: $\lim f(x) = l$, $l\neq0 \Rightarrow \lim\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}$. $\lim_{x\to1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$

(4) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+x)}{x^5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+x)}{x^2+x}\times\frac{x^2+x}{x^5}$

أحسب أولا: $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+x)}{x^2+x}$

أضع: $t = x^2+x$

إذن: $(x\to+\infty) \Rightarrow (t\to+\infty)$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+x)}{x^2+x} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$

ولدينا: $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x}{x^5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^5} = 0$

إذن: $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+x)}{x^5} = 0$

التمرين 6

أحسب f'(x) لكل x من المجال I في الحالات التالية:

(1) $I = \mathbb{R}$, $f: x\mapsto\ln(x^4+x^2+1)$

(2) $I =]-\infty;-1[$, $f: x\mapsto(x^3+x)\ln(x^2-1)$

(3) $I =]2;+\infty[$, $f: x\mapsto\ln\left(\sqrt{x+1}\right) + \sqrt{\ln(x-1)}$

(4) $I =]0;+\infty[$, $f: x\mapsto x\ln x - x$

الحل

أحسب f'(x) لكل x من المجال I في الحالات التالية:

(1) $I = \mathbb{R}$; $f: x\mapsto\ln(x^4+x^2+1)$

لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا:

$f'(x) = \frac{(x^4+x^2+1)'}{x^4+x^2+1} = \frac{4x^3+2x}{x^4+x^2+1}$

> لا تنسى: $(\ln|u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

(2) $I =]-\infty;-1[$; $f: x\mapsto(x^3+x)\ln(x^2-1)$

لكل x من $]-\infty;-1[$