السنة 2 بكالوريا علوم رياضية	الدوال الأصلية	رياضيات النجاح

تمرين 1 : حدد دالة أصلية للدالة f في كل حالة مما يلي :

$f(x)=\frac{3}{x^2}+\sqrt[3]{x}+(2x+1)^4$ ، $f(x)=x\sqrt{x}$ ، $f(x)=\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$ ، $f(x)=\frac{1}{x^2+2x+2}$

$f(x)=\frac{x}{\sqrt{3+x^2}}$ ، $f(x)=\frac{\text{Arctan}\,x}{1+x^2}$ ، $f(x)=\sin(5x+1)+\sin^3(x)$ ، $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x}}$

$f(x)=x\sqrt{x^2+1}$ ، $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$ ، $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$ ، $f(x)=\sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{x}}$

تمرين 2 : نعتبر الدالة العددية المعرفة كما يلي : $f(x)=x\sqrt{x+1}$

1) تحقق أن : $\forall x\in[-1;+\infty[\quad f(x)=(x+1)\sqrt{x+1}-\sqrt{x+1}$

2) أوجد الدالة الأصلية F للدالة f والتي تنعدم في 0

تمرين 3 : نعتبر الدالة العددية المعرفة كما يلي : $f(x)=\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)^2$

1) حدد العددين الحقيقين a و b حيث : $\forall x\in IR\quad f(x)=\frac{a}{x^2+1}+\frac{bx}{(x^2+1)^2}$

2) أوجد الدالة الأصلية F للدالة f والتي تحقق : $\lim_{x\to+\infty}F(x)=0$

تمرين 4 :

نعتبر الدالة العددية المعرفة كما يلي : $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ و لتكن F الدالة الأصلية لـ f والتي تنعدم في 0

1) بين أن $\forall x\in[0,+\infty[\quad F(x)\geq\frac{1}{2}x^2$

2) أحسب $\lim_{x\to+\infty}F(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}$ و أول النتائج هندسيا

3) بين أن الدالة F فردية

4) أوجد جدول تغيرات الدالة F

5) أوجد معادلة مماس الدالة F في الصفر

6) حدد نقط انعطاف منحنى الدالة F

7) أنشئ في معلم متعامد ممنظم (C_F) منحنى الدالة F

تمرين 1 :

لدينا : $f(x)=\frac{3}{x^2}+\sqrt[3]{x}+(2x+1)^4=-3\times\left(\frac{-1}{x^2}\right)+x^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{2}\times 2(2x+1)^4$

منه : $F(x)=-3\times\frac{1}{x}+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}x^{1+\frac{1}{3}}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}(2x+1)^{5}$ أي : $\boxed{F(x)=\frac{-3}{x}+\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+\frac{1}{10}(2x+1)^5}$

لدينا : $f(x)=x\sqrt{x}=x\times x^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{3}{2}}$ منه : $F(x)=\frac{1}{1+\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}+1}=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$ أي : $\boxed{F(x)=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}}$

لدينا : $f(x)=\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}=-\frac{-(x^2+x+1)'}{(x^2+x+1)^2}$ منه : $\boxed{F(x)=\frac{-1}{x^2+x+1}}$

لدينا : $f(x)=\frac{1}{x^2+2x+2}=\frac{1}{x^2+2x+1+1}=\frac{1}{(x+1)^2+1}=\frac{(x+1)'}{(x+1)^2+1}$ منه : $\boxed{F(x)=\mathrm{Arctan}(x+1)}$

لدينا : $f(x)=\frac{x}{\sqrt{3+x^2}}=\frac{1}{2}\frac{(3+x^2)'}{\sqrt{3+x^2}}$ منه : $\boxed{F(x)=\sqrt{3+x^2}}$

لدينا : $f(x)=\frac{\mathrm{Arctan}\,x}{1+x^2}=\mathrm{Arctan}\,x\times\frac{1}{1+x^2}=\mathrm{Arctan}\,x\times(\mathrm{Arctan}\,x)'$ منه : $\boxed{F(x)=\frac{1}{2}(\mathrm{Arctan}\,x)^2}$

لدينا :

$$f(x)=\sin(5x+1)+\sin(x)\times\sin^2(x)=\sin(5x+1)+\sin(x)\times(1-\cos^2(x))=\sin(5x+1)+\sin(x)-\sin(x)\cos^2(x)$$

$$f(x)=\sin(5x+1)+\sin(x)+\cos^2(x)\times(\cos(x))'$$

منه : $\boxed{F(x)=\frac{-1}{5}\cos(5x+1)-\cos(x)+\frac{1}{3}\cos^3(x)}$

لدينا : $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x}}=\frac{x}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}+\frac{2}{2\sqrt{x}}$ منه : $F(x)=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}x^{1+\frac{1}{2}}+2\sqrt{x}$ أي : $\boxed{F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}}$

لدينا : $f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}\times(x^2+1)'$ منه : $F(x)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1+\frac{1}{2}}(x^2+1)^{1+\frac{1}{2}}$ أي : $\boxed{F(x)=\frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

لدينا : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}=\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+(\sqrt{x})^2}=2\frac{(\sqrt{x})'}{1+(\sqrt{x})^2}$ منه : $\boxed{F(x)=2\ \mathrm{Arctan}(\sqrt{x})}$

لدينا : $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}=\frac{x^2+1-1}{x^2+1}=1-\frac{1}{x^2+1}$ منه : $\boxed{F(x)=x-\mathrm{Arctan}(x)}$

لدينا : $f(x)=\sqrt{1+\sqrt{x}}\times\frac{1}{\sqrt{x}}=2\sqrt{1+\sqrt{x}}\times(\sqrt{x})'$

منه : $F(x)=2\times\frac{1}{1+\frac{1}{2}}(1+\sqrt{x})^{1+\frac{1}{2}}$ أي : $\boxed{F(x)=\frac{4}{3}(1+\sqrt{x})\sqrt{1+\sqrt{x}}}$

تمرين 2 : $f(x)=x\sqrt{x+1}$:

1	لدينا : $\forall x\in[-1;+\infty[\ (x+1)\sqrt{x+1}-\sqrt{x+1}=x\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}-\sqrt{x+1}=x\sqrt{x+1}=f(x)$
2	بما أن : $f(x)=(x+1)^{\frac{3}{2}}-(x+1)^{\frac{1}{2}}$ فإن الدوال الأصلية للدالة f هي على الشكل: $F(x)=\frac{1}{1+\frac{3}{2}}(x+1)^{1+\frac{3}{2}}-\frac{1}{1+\frac{1}{2}}(x+1)^{1+\frac{1}{2}}+\lambda\ /\lambda\in IR$ منه : $F(x)=\frac{2}{5}(x+1)^2\sqrt{x+1}-\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}+\lambda$ و لتكن $F_0(x)$ الدالة الأصلية للدالة f التي تنعدم في 0، إذن $F_0(0)=0$ منه: $\frac{2}{5}-\frac{2}{3}+\lambda=0$ منه : $\lambda=\frac{-2}{5}+\frac{2}{3}=\frac{4}{15}$ بالتالي : $\boxed{F_0(x)=\frac{2}{5}(x+1)^2\sqrt{x+1}-\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}+\frac{4}{15}}$

تمرين 3 : $f(x)=\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)^2$

1	لدينا : $\forall x\in IR\ \ f(x)=\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)^2=\frac{x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2+1}{(x^2+1)^2}-\frac{2x}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{x^2+1}-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$ منه : $\boxed{a=1 \text{ و } b=-2}$
2	الدوال الأصلية للدالة f هي على الشكل: $F(x)=Arc\tan x+\frac{1}{x^2+1}+\lambda\ /\lambda\in IR$ و لتكن $F_0(x)$ الدالة الأصلية للدالة f التي تحقق $\lim\limits_{x\to+\infty}F_0(x)=0$ منه : $\frac{\pi}{2}+0+\lambda=0$ منه : $\lambda=-\frac{\pi}{2}$ بالتالي: $\boxed{F_0(x)=Arc\tan x+\frac{1}{x^2+1}-\frac{\pi}{2}}$

تمرين 4 : $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ ، F الدالة الأصلية لـ f والتي تنعدم في 0

1	نعتبر الدالة العددية h المعرفة على IR بما يلي: $h(x)=F(x)-\frac{1}{2}x^2$ لدينا : $\forall x\in IR\ \ h'(x)=f(x)-x=\sqrt{x^2+1}-x$ و بما أن : $x^2+1>x^2$ فإن : $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}$ أي : $\sqrt{x^2+1}>\lvert x\rvert$ وحيث أن : $\forall x\in IR\ \lvert x\rvert\geq x$ فإن : $\sqrt{x^2+1}>x$ ، ما يعني أن : h تزايدية قطعا على IR بالتالي : $x\geq0\ \Rightarrow h(x)\geq h(0)=0$ بالتالي : $\forall x\in[0,+\infty[\ \ F(x)\geq\frac{1}{2}x^2$
2	بما أن : $\forall x\in[0,+\infty[\ \ F(x)\geq\frac{1}{2}x^2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}x^2=+\infty$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$ و بما أن : $\forall x\in[0,+\infty[\ \ \frac{F(x)}{x}\geq\frac{1}{2}x$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}x=+\infty$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=+\infty$ و هذا يعني أن منحنى الدالة F يقبل فرعا شلجميا باتجاه محور الأراتيب.
3	نعتبر الدالة العددية p المعرفة على IR بما يلي : $p(x)=F(-x)+F(x)$ ، لدينا : $\forall x\in IR\ \ p'(x)=(F(-x))'+(F(x))'=-F'(-x)+F'(x)=-f(-x)+f(x)=-\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+1}=0$ إذن: p دالة ثابتة، إذن : $\exists C\in IR\ /\ \forall x\in IR\ p(x)=C$ منه : $\forall x\in IR\ \ F(-x)+F(x)=C$ منه : $F(0)+F(0)=C$ إذن : $C=0$ و بالتالي : $\forall x\in IR\ \ F(-x)=-F(x)$ وحيث أن : $x\in IR\Rightarrow -x\in IR$ فإن F دالة فردية.

4	بما أن : $F'(x)= f(x)>0$ $\forall x\in IR$ فإن F تزايدية قطعا على IR .	
5	معادلة مماس الدالة F في الصفر هي : $(\Delta):\ y=F'(0)(x-0)+F(0)$ أي : $(\Delta):\ y= f(0)x=x$	
6	لدينا : $\forall x\in IR\ F''(x)= f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ و حيث أن الشمتقة الثانية تنعدم و تغير إشارتها فقط في الصفر، فنقط انعطاف منحنى الدالة F هي النقطة $O(0 , 0)$	
7