المعادلات التفاضلية

السلسلة 1 (4 تمارين)

التمرين 1 :

نعتبر المعادلة التفاضلية $2y'-y=0 \quad (E)$

1) حدد الحل العام للمعادلة التفاضلية (E)
2) حدد الحل f للمعادلة التفاضلية (E) و الذي يحقق $f(1)=\sqrt{2}$

التمرين 2 :

لتكن f دالة عددية قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث :
لكل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\big(2-3f(x)\big)f(x)$ و $f(x)\neq 0$ و $f(0)=1$
نضع $g(x)=\dfrac{1}{f(x)} \quad (\forall x\in\mathbb{R})$

1) بين أن g حل لمعادلة تفاضلية من الدرجة الأولى يتم تحديدها
2) حدد تعبير $f(x)$

التمرين 3 :

حل المعادلات التفاضلية :

$(E_1) \quad y''-2y'-3y=0$

$(E_2) \quad 9y''-6y'+y=0$

$(E_3) \quad y''-4y'+13y=0$

التمرين 4 :

لتكن المعادلة التفاضلية $(E):\quad y'+3y=x^2$

1) حدد دالة حدودية g من الدرجة الثانية تكون حلا للمعادلة التفاضلية (E)
2) بين أن دالة f تكون حلا للمعادلة التفاضلية (E) إذا وفقط إذا كانت $f-g$ حلا للمعادلة التفاضلية $(E_1):\quad y'+3y=0$
3) حل المعادلة التفاضلية (E_1) ثم استنتج الحل العام للمعادلة التفاضلية (E)

تصحيح التمرين الأول

1) المعادلة $2y' - y = 0$ (E) تكافئ $y' = \frac{1}{2}y$

مجموعة حلول المعادلة التفاضلية هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$: $y : x \mapsto \lambda e^{\frac{1}{2}x}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$

2) f يحقق المعادلة (E) إذن $f(x) = \lambda e^{\frac{x}{2}}$ $(\forall x \in \mathbb{R})$

و بما أن $f(1) = \sqrt{2}$ فإن $\lambda e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ إذن $\lambda\sqrt{e} = \sqrt{2}$ إذن $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e}} = \frac{\sqrt{2e}}{e}$

و منه : $f(x) = \frac{\sqrt{2e}}{e} e^{\frac{x}{2}} = \sqrt{2e}\, e^{\frac{x}{2}-1}$ $(\forall x \in \mathbb{R})$

تصحيح التمرين الثاني

1) لتكن f دالة عددية قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث :

لكل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = (2 - 3f(x))f(x)$ و $f(x) \neq 0$

$$g'(x) = \left(\frac{1}{f(x)}\right)'$$
$$g'(x) = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$$
$$g'(x) = \frac{-(2-3f(x))f(x)}{(f(x))^2}$$
$$g'(x) = \frac{3f(x) - 2}{f(x)}$$
$$g'(x) = 3 - \frac{2}{f(x)}$$
$$g'(x) = 3 - 2g(x)$$
$$g'(x) = -2g(x) + 3$$

إذن g حل للمعادلة التفاضلية $y' = -2y + 3$

2) لدينا g حل للمعادلة التفاضلية $y' = -2y + 3$

إذن $g(x) = \lambda e^{-2x} - \frac{3}{-2}$ $(\forall x \in \mathbb{R})$

إذن : $g(x) = \lambda e^{-2x} + \frac{3}{2}$ $(\forall x \in \mathbb{R})$

و لدينا : $g(x)=\dfrac{1}{f(x)} \quad (\forall x\in\mathbb{R})$

إذن $f(x)=\dfrac{1}{g(x)} \quad (\forall x\in\mathbb{R})$

إذن $f(x)=\dfrac{1}{\lambda e^{-2x}+\dfrac{3}{2}} \quad (\forall x\in\mathbb{R})$

و بما أن $f(0)=1$ فإن $\dfrac{1}{\lambda+\dfrac{3}{2}}=1$ إذن $\lambda=\dfrac{-1}{2}$

و بالتالي : $f(x)=\dfrac{1}{\dfrac{-1}{2}e^{-2x}+\dfrac{3}{2}} \quad (\forall x\in\mathbb{R})$

أي : $f(x)=\dfrac{2}{3-e^{-2x}} \quad (\forall x\in\mathbb{R})$

تصحيح التمرين الثالث

✓ لنحل المعادلة التفاضلية $(E_1) \quad y''-2y'-3y=0$

- المعادلة المميزة $r^2-2r-3=0$

لدينا $\Delta=16$

إذن المعادلة المميزة تقبل حلين حقيقيين : $r_2=3$ و $r_1=-1$

- إذن مجموعة حلول المعادلة التفاضلية $(E_1) \quad y''-2y'-3y=0$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$y:x\mapsto \alpha e^{-x}+\beta e^{3x} \quad (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$$

✓ لنحل المعادلة التفاضلية $(E_2) \quad 9y''-6y'+y=0$

- المعادلة المميزة $9r^2-6r+1=0$

لدينا $\Delta=0$

إذن المعادلة المميزة تقبل حلا وحيدا : $r_0=\dfrac{1}{3}$

- إذن مجموعة حلول المعادلة التفاضلية $(E_2) \quad 9y''-6y'+y=0$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$y:x\mapsto (\alpha x+\beta)e^{\frac{1}{3}x} \quad (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$$

✓ لنحل المعادلة التفاضلية $(E_3) \quad y''-4y'+13y=0$

- المعادلة المميزة $r^2-4r+13=0$

لدينا $\Delta=-36$

إذن المعادلة المميزة تقبل حلين عقديين مترافقين أحدهما : $r=2+3i$

- إذن مجموعة حلول المعادلة التفاضلية $y''-4y'+13y=0$ (E_3) هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 \quad y : x \mapsto (\alpha\cos 3x+\beta\sin 3x)e^{2x}$$

تصحيح التمرين الرابع

1) لنحدد دالة حدودية g من الدرجة الثانية تكون حلا للمعادلة التفاضلية $(E):\quad y'+3y=x^2$

نضع $g(x)=ax^2+bx+c \quad (\forall x\in\mathbb{R})$

لدينا $g'(x)=2ax+b \quad (\forall x\in\mathbb{R})$

g حل للمعادلة $(E):\quad y'+3y=x^2$ إذن $(\forall x\in\mathbb{R})\quad g'(x)+3g(x)=x^2$

إذن $(\forall x\in\mathbb{R})\quad 2ax+b+3(ax^2+bx+c)=x^2$

إذن $(\forall x\in\mathbb{R})\quad 2ax+b+3ax^2+3bx+3c=x^2$

إذن $(\forall x\in\mathbb{R})\quad 3ax^2+(2a+3b)x+(b+3c)=x^2$

و منه : $\begin{cases} 3a=1 \\ 2a+3b=0 \\ b+3c=0 \end{cases}$

و بالتالي : $\begin{cases} a=\dfrac{1}{3} \\ b=\dfrac{-2}{9} \\ c=\dfrac{2}{27} \end{cases}$

نستنتج أن : $(\forall x\in\mathbb{R})\quad g(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{9}x+\frac{2}{27}$

2)

- ✓ نفترض أن f تكون حلا للمعادلة التفاضلية (E)

إذن $(\forall x\in\mathbb{R})\quad f'(x)+3f(x)=x^2 \quad \boxed{1}$

و نعلم أن g حل للمعادلة التفاضلية (E)

إذن $(\forall x\in\mathbb{R})\quad g'(x)+3g(x)=x^2 \quad \boxed{2}$

بحساب $\boxed{1}-\boxed{2}$ نجد : $(\forall x\in\mathbb{R})\quad f'(x)-g'(x)+3f(x)-3g(x)=0$

إذن $(\forall x\in\mathbb{R})\quad (f-g)'(x)+3(f-g)(x)=0$

و منه $f-g$ حلا للمعادلة التفاضلية $(E_1):\quad y'+3y=0$

- ✓ عكسيا نفترض أن $f-g$ حلا للمعادلة التفاضلية $(E_1):\quad y'+3y=0$

إذن $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad (f-g)'(x)+3(f-g)(x)=0$

إذن $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x)-g'(x)+3f(x)-3g(x)=0$

إذن $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x)+3f(x)=g'(x)-3g(x)$

و بما أن g حل للمعادلة $(E): \quad y'+3y=x^2$ فإن $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad g'(x)+3g(x)=x^2$

إذن $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x)+3f(x)=x^2$

و منه f حل للمعادلة التفاضلية (E)

(3

- ✓ لنحل المعادلة التفاضلية $(E_1): \quad y'+3y=0$

$(E_1): \quad y'+3y=0$ تكافئ $(E_1): \quad y'=-3y$

مجموعة حلول المعادلة التفاضلية $(E_1): \quad y'+3y=0$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$(\lambda \in \mathbb{R}) \quad y: x \mapsto \lambda e^{-3x}$

- ✓ نعلم أنه $f-g$ حلا للمعادلة التفاضلية $(E_1): \quad y'+3y=0$ تعني أن f تكون حلا للمعادلة التفاضلية (E)

$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad (f-g)(x)=\lambda e^{-3x}$

إذن : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x)=g(x)+\lambda e^{-3x}$

إذن : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{9}x+\frac{2}{27}+\lambda e^{-3x}$ حيث $(\lambda \in \mathbb{R})$

つづく