~ الثانية علوم تجريبية ~

سلسلة الاشتقاق

[7 تمارين محلولة]

التمرين 1:

أدرس قابلية اشتقاق f **في العدد** a **ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجة :**

1) $a=2$ $\quad f(x)=x^3+1$

(2 $a=1^+$ $\quad f(x)=\sqrt{x-1}$

التمرين 2:

أحسب مشتقة الدالة f **في الحالات التالية : (غير مطلوب دراسة قابلية للاستقاق)**

1) $f(x)=6x-\sqrt{7}$

2) $f(x)=x^2-\frac{5}{2}x$

3) $f(x)=x.\sin x$

4) $f(x)=(cosx)^4$

5) $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$

6) $f(x)=\sqrt{x^2+7}$

7) $f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

8) $f(x)=cos\left(x^3\right)$

9) $f(x)=\tan(4x)$

التمرين 3:

أحسب مشتقة الدالة f **في الحالات التالية : (غير مطلوب دراسة قابلية للاستقاق)**

1) $f(x)=\sqrt[3]{3x+1}$

2) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$

3) $f(x)=x.\sqrt[3]{x}$

4) $f(x)=\left(\sqrt[3]{x}\right)^5$

5) $f(x)=\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x}$

التمرين 4:

لتكن f **الدالة المعرفة بما يلي :** $f(x)=x^3+x$

1) **بين أن** f **تقبل دالة عكسية** f^{-1} **معرفة على مجال** J **يتم تحديده**
2) **تحقق أن :** $f^{-1}(2)=1$
3) **بين أن** f^{-1} **قابلة للاشتقاق في** 2
4) **أحسب :** $(f^{-1})'(2)$

التمرين 5:

لتكن f **الدالة المعرفة على** $[0,+\infty[$ **بما يلي :** $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x}-1 & ;0\le x<1 \\ f(x)=\dfrac{x^2-1}{4} & ;x\ge 1 \end{cases}$

1. **أدرس اتصال** f **في** 1
2. **أدرس اشتقاق** f **في** 1
3. **أول النتائج هندسيا**

التمرين 6:

أحسب مشتقات الدوال التالية : (غير مطلوب دراسة قابلية للاستقاق)

1) $f(x)=x^5+\frac{1}{2}x^4-2x^3+5x-4$
2) $f(x)=(2x+1)\sqrt{x}$
3) $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+3}$
4) $f(x)=(4-3x)^3$
5) $f(x)=\dfrac{4}{(x^2-1)^3}$
6) $f(x)=\sqrt{2x^2-3x+1}$
7) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$
8) $f(x)=\sin^4 x-\cos^2 x$
9) $f(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$
10) $f(x)=x+\sqrt{x^2-1}$
11) $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x+2}$

التمرين 7:

لتكن f **الدالة المعرفة بما يلي :** $f(x)=x^3-3x-3$

1. **أدرس تغيرات** f **على** $\mathbb{R}$
2. **ليكن** g **قصور** f **على المجال** $[1,+\infty[$
   أ. **بين أن** g **تقبل دالة عكسية** g^{-1} **معرفة من مجال** J **يتم تحديده نحو** $[1,+\infty[$
   ب. **بين أن المعادلة** $g(x)=0$ **تقبل حلا وحيدا** α **في** $]1,+\infty[$ **ثم تحقق أن** $2<\alpha<3$
3. **بين أن :** $\left(g^{-1}\right)'(0)=\dfrac{1}{3\left(\alpha^2-1\right)}$

تصحيح التمرين 1:

1) لندرس قابلية اشتقاق f في العدد $a=2$

لدينا :

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} \qquad =\lim_{x\to 2}\frac{x^3+1-9}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2^3}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}x^2+2x+4$$
$$=12$$

إذن f قابلة للاشتقاق في العدد 2 و لدينا : $f'(2)=12$

<u>التأويل الهندسي :</u> C_f يقبل مماس في النقطة $A(2,9)$ معامله الموجه : 12

و معادلته : $y=f'(2)(x-2)+f(2)$

$$\boxed{y=12x+15}$$

2) لندرس قابلية اشتقاق f في العدد $a=1$ على اليمين :

لدينا :

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \quad =\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$$
$$=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{1}{\sqrt{x-1}}$$
$$=+\infty$$

إذن f غير قابلة للاشتقاق في العدد $a=1$ على اليمين

<u>التأويل الهندسي :</u> C_f يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى في النقطة $A(1,0)$

تصحيح التمرين 2:

1) $f'(x)=\left(6x-\sqrt{7}\right)'=6$

2) $f'(x)=\left(x^2-\frac{5}{2}x\right)'=2x-\frac{5}{2}$

3) $f'(x)=(x.\sin x)'=(x)'.\sin x+x.\sin'(x)=1.\sin x+x.\cos x=\sin x+x.\cos x$

4) $f'(x)=\left((cos)^4\right)'(x)=4.\cos'(x).\cos^{4-1}(x)=-4\sin(x).\cos^3(x)$

5) $f'(x)=\left(\dfrac{x^2}{x+1}\right)'=\dfrac{(x^2)'.(x+1)-x^2.(x+1)'}{(x+1)^2}=\dfrac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}=\dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

6) $f'(x)=\left(\sqrt{x^2+7}\right)'=\dfrac{(x^2+7)'}{2\sqrt{x^2+7}}=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+7}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+7}}$

7) $f'(x)=\left(\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)'=\left(\dfrac{1}{x}\right)'.\sin'\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{-1}{x^2}.\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

8) $f'(x)=\left(cos(x^3)\right)'=(x^3)'.\cos'(x^3)=-3x^2.\sin(x^3)$

9) $f'(x)=(\tan(4x))'=(4x)'.\tan'(4x)=4.\left(1+\tan^2(4x)\right)$

تصحيح التمرين 3:

1) $f'(x)=\left(\sqrt[3]{3x+1}\right)'=\dfrac{(3x+1)'}{3\sqrt[3]{3x+1}^2}=\dfrac{3}{3\sqrt[3]{3x+1}^2}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3x+1}^2}$

2) $f'(x)=\left(\sqrt[3]{x^2}\right)'=\dfrac{(x^2)'}{3\sqrt[3]{x^2}^2}=\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}=\dfrac{2x}{3x\sqrt[3]{x}}=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

3) $f'(x)=\left(x.\sqrt[3]{x}\right)'=(x)'.\sqrt[3]{x}+x.\left(\sqrt[3]{x}\right)'=\sqrt[3]{x}+x.\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x}^2}=\sqrt[3]{x}+\dfrac{\sqrt[3]{x}}{3}=\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{x}$

4) $f'(x)=\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^5\right)'=5.\left(\sqrt[3]{x}\right)'\left(\sqrt[3]{x}\right)^{5-1}=5.\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x}^2}.\sqrt[3]{x}^4=\dfrac{5}{3}\sqrt[3]{x}^2$

5)

$$f'(x)=\left(\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x}\right)'=\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)'.x+\sqrt[3]{x^3+1}.(x)'}{x^2}=\frac{\frac{(x^3+1)'}{3\sqrt[3]{x^3+1}^2}.x-\sqrt[3]{x^3+1}}{x^2}=\frac{\frac{3x^2}{3\sqrt[3]{x^3+1}^2}.x-\sqrt[3]{x^3+1}}{x^2}=\frac{\frac{x^3}{\sqrt[3]{x^3+1}^2}-\sqrt[3]{x^3+1}}{x^2}=\frac{\frac{x^3-(x^3+1)}{\sqrt[3]{x^3+1}^2}}{x^2}=\frac{-1}{x^2\sqrt[3]{x^3+1}^2}$$

تصحيح التمرين 4:

(1

- ✓ f دالة متصلة على $\mathbb{R}$ (لأنها دالة حدودية)
- ✓ f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ (لأنها دالة حدودية)

ليكن $x \in \mathbb{R}$:

لدينا : $f'(x) = (x^3 + x)' = 3x^2 + 1$

إذن : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x) = 3x^2 + 1$

إذن : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x) > 0$

و منه f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

و بالتالي f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال J نحو $\mathbb{R}$

بحيث : $J = f(\mathbb{R}) = f(]-\infty,+\infty[) = \left]\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[=]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$

(2

$$\begin{aligned} f^{-1}(2) = \alpha \quad &\Leftrightarrow \quad f(\alpha) = 2 \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha^3 + \alpha = 2 \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha^3 + \alpha - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 2) = 0 \end{aligned}$$

لدينا : $\begin{pmatrix} \alpha^2 + \alpha + 2 = 0 \\ \Delta = -7 \end{pmatrix}$

إذن : $\alpha = 1 \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(2) = \alpha$ و منه : $f^{-1}(2) = 1$

3) لدينا : $f(1) = 2$

- ✓ f قابلة للاشتقاق في 1
- ✓ $f'(1) = 4 \neq 0$

إذن f^{-1} قابلة للاشتقاق في $2 = f(1)$

4) $(f^{-1})'(2) = (f^{-1})'(f(1)) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{4}$

تصحيح التمرين 5:

لتكن f الدالة المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x}-1 & ;0\le x<1 \\ f(x)=\dfrac{x^2-1}{4} & ;x\ge 1 \end{cases}$

1) لدينا : $f(1)=\dfrac{1^2-1}{4}=0$

✓ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{x}-1=0$

✓ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-1}{4}=0$

بما أن $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)$ فإن f متصلة في 1.

2)

✓ لدينا : $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{1}{2}$

إذن f قابلة للاشتقاق في العدد 1 على اليسار و لدينا : $f'_g(1)=\dfrac{1}{2}$

✓ و لدينا : $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\frac{x^2-1}{4}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

إذن f قابلة للاشتقاق في العدد 1 على اليمين و لدينا : $f'_d(1)=\dfrac{1}{2}$

- بما أن f قابلة للاشتقاق في العدد 1 على اليسار و على اليمين و $f'_d(1)=f'_g(1)$ فإن f قابلة للاشتقاق في العدد 1 و لدينا : $f'(1)=\dfrac{1}{2}$

3) **التأويل الهندسي :** C_f يقبل مماس في النقطة $A(1,0)$ معامله الموجه : $\dfrac{1}{2}$

و معادلته : $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ أي : $\boxed{y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}}$

تصحيح التمرين 6:

$$f'(x)=\left(x^5+\frac{1}{2}x^4-2x^3+5x-4\right)'=5x^4+2x^3-6x^2+5 \quad (1$$

$$f'(x)=\left((2x+1)\sqrt{x}\right)'=(2x+1)'\sqrt{x}+(2x+1)\left(\sqrt{x}\right)'=2\sqrt{x}+(2x+1).\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{4x+2x+1}{2\sqrt{x}}=\frac{6x+1}{2\sqrt{x}} \quad (2$$

$$f'(x)=\left(\frac{x^2+x+1}{x+3}\right)'=\frac{\left(x^2+x+1\right)'\times(x+3)-\left(x^2+x+1\right)\times(x+3)'}{(x+3)^2}=\frac{(2x+1)(x+3)-\left(x^2+x+1\right)}{(x+3)^2}=\frac{2x^2+6x+x+3-x^2-x-1}{(x+3)^2}=\frac{x^2+6x+2}{(x+3)^2} \quad (3$$

$$f'(x)=\left((4-3x)^3\right)'=3(4-3x)'(4-3x)^{3-1}=(3)\times(-3)(4-3x)^2=-9(4-3x)^2 \quad (4$$

$$f'(x)=\left(\frac{4}{\left(x^2-1\right)^3}\right)'=4\times\left(\frac{1}{\left(x^2-1\right)^3}\right)'=4\times\frac{-\left(\left(x^2-1\right)^3\right)'}{\left(\left(x^2-1\right)^3\right)^2}=-4\times\frac{3\left(x^2-1\right)'\left(x^2-1\right)^2}{\left(x^2-1\right)^6}=-12\times\frac{2x}{\left(x^2-1\right)^4}=\frac{-24}{\left(x^2-1\right)^4} \quad (5$$

$$f'(x)=\left(\sqrt{2x^2-3x+1}\right)'=\frac{\left(2x^2-3x+1\right)'}{2\sqrt{2x^2-3x+1}}=\frac{4x-3}{2\sqrt{2x^2-3x+1}} \quad (6$$

$$f'(x)=\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)'=\frac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)'\times x-\sqrt{x^2-1}\times(x)'}{x^2}=\frac{\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2-1}}\times x--\sqrt{x^2-1}}{x^2}=\frac{\frac{x^2-x^2+1}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2}=\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}} \quad (7$$

$$f'(x)=\left(\sin^4x-\cos^2x\right)'=4\sin'(x)sin^3x-2\cos'(x)\cos x=4\cos(x)\sin^3(x)+2\sin(x)\cos(x)=2\sin(x)\cos(x)\left(2\sin^2(x)+1\right) \quad (8$$

$$f'(x)=\left(\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\right)'=-2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) \quad (9$$

$$f'(x)=\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)'=1+\frac{\left(x^2-1\right)'}{2\sqrt{x^2-1}}=1+\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2-1}}=\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}} \quad (10$$

$$f'(x)=\left(\sqrt[3]{x^3-3x+2}\right)'=\frac{\left(x^3-3x+2\right)'}{3\sqrt[3]{x^3-3x+2}^2}=\frac{3x^2-3}{3\sqrt[3]{x^3-3x+2}^2}=\frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x^3-3x+2}^2} \quad (11$$

تصحيح التمرين 7:

1. لندرس تغيرات f على $\mathbb{R}$

لدينا f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

ليكن $x \in \mathbb{R}$:

لدينا : $f'(x) = \left(x^3 - 3x - 3\right)' = 3x^2 - 3$

إذن : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x) = 3\left(x^2 - 1\right)$

لدينا : $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x = 1 \quad أو \quad x = -1)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$3(x2-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

على المجالين $]-\infty,-1]$ و $[1,+\infty[$:

لدينا $f'(x) \geq 0$ و $(x = 1 \quad أو \quad x = -1) \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) = 0$ إذن f تزايدية قطعا

على المجال $[-1,1]$:

لدينا : $f'(x) \leq 0$ و $(x = 1 \quad أو \quad x = -1) \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) = 0$ إذن f تناقصية قطعا

2. ليكن g قصور f على المجال $[1,+\infty[$

أ-

- ✓ لدينا g دالة متصلة على المجال $[1,+\infty[$ (كقصور لدالة حدودية)
- ✓ و لدينا : g تزايدية قطعا على المجال $[1,+\infty[$

إذن g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة من مجال J نحو $[1,+\infty[$

حيث : $J = g\left([1,+\infty[\right) = \left[g(1), \lim_{x\to+\infty} g(x)\right[= [-5,+\infty[$

ب-

•

- ✓ لدينا g دالة متصلة على المجال $[1,+\infty[$
- ✓ و لدينا : g تزايدية قطعا على المجال $[1,+\infty[$
- ✓ و كذلك : $0 \in g\left([1,+\infty[\right)$

إذن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $[1,+\infty[$

•

- ✓ لدينا g دالة متصلة على $[0,1]$
- ✓ و لدينا : $g(2)\times g(3)<0$ ($g(3)=15$ و $g(2)=-1$)

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية : $2<\alpha<3$

.3

- ✓ لدينا g قابلة للاشتقاق في α
- ✓ و لدينا : $g'(\alpha)=3\left(\alpha^2-1\right)\neq 0$

إذن g^{-1} قابلة للاشتقاق في $g(\alpha)=0$

و لدينا : $\left(g^{-1}\right)'(0)=\left(g^{-1}\right)'(g(\alpha))=\dfrac{1}{g'(\alpha)}=\dfrac{1}{3\left(\alpha^2-1\right)}$

つづく