# ☑ تمارين محلولة: الدوال العددية

## التمرين 1

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي: $f(x)=\frac{4x^2-4x}{(2x-1)^2}$

1) حدد $D_f$ مجموعة تعريف الدالة f.

2) أ- أحسب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب- أعط تأويلا هندسيا للنتيجة.

3) أ- أحسب النهايتين: $\lim\limits_{x\to\frac12^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to\frac12^-} f(x)$

ب- أعط تأويلا هندسيا للنتيجة.

الحل ✓

لدينا: $f(x)=\frac{4x^2-4x}{(2x-1)^2}$

1) أحدد $D_f$:

لدينا: $(\forall x\in\mathbb R): x\in D_f \Leftrightarrow (2x-1)^2\neq 0$

$\Leftrightarrow 2x-1\neq 0$

$\Leftrightarrow x\neq\frac12$

إذن: $D_f=\mathbb R\setminus\left\{\frac12\right\}=\left]-\infty;\frac12\right[\cup\left]\frac12;+\infty\right[$

2) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^2}{4x^2}=1$

ب- التأويل الهندسي:

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ وبالتالي فالمستقيم ذو المعادلة: $y=1$ مقارب موازي لمحور الأفاصيل للمنحنى $(\mathscr C_f)$ بجوار $+\infty$.

3) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to\frac12^+} f(x)$:

لدينا: $\lim\limits_{x\to\frac12^+}(4x^2-4x)=-1$ و $\lim\limits_{x\to\frac12^+}(2x-1)^2=0^+$

إذن: $\lim\limits_{x\to\frac12^+} f(x)=-\infty$

كذلك لدينا: $\lim\limits_{x\to\frac12^-}(4x^2-4x)=-1$ و $\lim\limits_{x\to\frac12^-}(2x-1)^2=0^+$

إذن: $\lim\limits_{x\to\frac12^-} f(x)=-\infty$

ب- التأويل الهندسي:

بما أن $\lim\limits_{x\to\frac12} f(x)=-\infty$ فإن المستقيم ذي المعادلة $x=\frac12$ مقارب موازي لمحور الأراتيب للمنحنى $(\mathscr C_f)$.

## التمرين 2

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb R$ بما يلي: $f(x)=-x+\sqrt{x^2+8}$

1) أحسب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2) أدرس الفروع اللانهائية لـ $(\mathscr C_f)$ منحنى الدالة f.

الحل ✓

لدينا: $f(x)=-x+\sqrt{x^2+8}$

1) * أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(-x+\sqrt{x^2+8}\right)\left(-x-\sqrt{x^2+8}\right)}{-x-\sqrt{x^2+8}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-(x^2+8)}{-x-\sqrt{x^2+8}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-8}{-x-\sqrt{1+\frac{8}{x^2}}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-8}{-x\left(1+\sqrt{1+\frac{8}{x^2}}\right)}=0$

لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-8}{-x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\sqrt{1+\frac{8}{x^2}}\right)=2$

* أحسب: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+8}=+\infty$

إذن: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x+\sqrt{x^2+8}\right)=+\infty$

2) أدرس الفروع اللانهائية:

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ إذن المستقيم ذو المعادلة $y=0$ أي محور الأفاصيل هو مقارب للمنحنى $(\mathscr C_f)$ بجوار $+\infty$.

من جهة أخرى لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

وأن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x+\sqrt{x^2+8}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-1+\frac{\sqrt{x^2+8}}{x}\right)$

لا أنسى أن: $\sqrt{x^2}=-x$ لأن: $x\to-\infty$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-1-\sqrt{\frac{x^2+8}{x^2}}\right)$

$=-2$ (لأن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x^2+8}{x^2}}=1$)

وأن:

$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+2x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+8}\right)$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2-8}{x-\sqrt{x^2+8}}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-8}{x-\sqrt{x^2\left(1+\frac{8}{x^2}\right)}}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-8}{x+x\sqrt{1+\frac{8}{x^2}}}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-8}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{8}{x^2}}\right)}=0$

لأن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-8}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\sqrt{1+\frac{8}{x^2}}\right)=2$

إذن المستقيم: $(\Delta): y=-2x$ هو مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr C_f)$ بجوار $-\infty$.

## التمرين 3

نعتبر الدالة f العددية المعرفة على $]-2;+\infty[$ بما يلي: $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+d}$ حيث a و b و c و d أعداد حقيقية.

والجدول التالي يمثل جدول تغيرات الدالة f.

| x | -2 | | 0 | | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | | − | 0 | + | |
| f(x) | +∞ | ↘ | 5 | ↗ | +∞ |

و $(\mathscr C_f)$ منحنى الدالة f يمر من النقطة $A(-1;6)$.

1) تحقق أن $(\mathscr C_f)$ يقبل مقاربا موازيا لمحور الأراتيب ثم استنتج d.

2) حدد الأعداد a و b و c.

3) أ- بين أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y=x+3$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr C_f)$.

ب- أدرس الوضع النسبي لـ (D) و $(\mathscr C_f)$.

الحل ✓

f معرفة على $]-2;+\infty[$:

1) أتحقق أن $(\mathscr C_f)$ يقبل مقاربا موازيا لمحور الأراتيب ثم أستنتج d.

من خلال جدول التغيرات لدينا: $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=+\infty$

إذن المستقيم ذو المعادلة: $x=-2$ مقارب موازي لمحور الأراتيب للمنحنى $(\mathscr C_f)$.

وبما أن: $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=+\infty$ و $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+d}$

فإن: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-2^+}(x+d)=0\\ c>0\end{cases}$ لأن: $\lim\limits_{x\to-2^+}(ax+b)=-2a+b\in\mathbb R$

لا أنسى أن: إذا كان $c<0$ فإن $\lim\limits_{x\to-2^+}\frac{c}{x+d}=-\infty$

إذن: $d=2$

2) أحدد a و b و c:

لدينا حسب المعطيات: $f(0)=5$ (انظر الجدول)، وبما أن $A(-1;6)\in(\mathscr C_f)$

إذن: $\begin{cases}f(0)=5\\ f(-1)=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b+\frac{c}{2}=5\\ -a+b+c=6\end{cases}$

وبما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ فإن $a>0$

$\left(f(x)=ax+b+\frac{c}{x+2}\right)$

$(S)\begin{cases}b=5-\frac{c}{2}\\ a=b+c-6=5-\frac{c}{2}+c-6=\frac{c}{2}-1\end{cases}$

ومن جهة أخرى لدينا: $\forall x\in]-2;+\infty[: f'(x)=a-\frac{c}{(x+d)^2}$

ومن خلال جدول التغيرات نلاحظ أن f تقبل قيمة دنوية في 0.

إذن: $f'(0)=0\Leftrightarrow a-\frac{c}{4}=0$

$\Leftrightarrow a=\frac{c}{4}$

وبالتالي من النظمة (S) نستنتج: $\frac{c}{4}=\frac{c}{2}-1\Leftrightarrow\frac{c}{4}=1$

$\Leftrightarrow c=4$

إذن: $a=1$ و $b=5-\frac{c}{2}=3$

خلاصة: $f(x)=x+3+\frac{4}{x+2}$

3) أ- أبين أن $(\mathscr C_f)$ يقبل مقاربا مائلا (D):

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(x+3))=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x+2}=0$

إذن المستقيم (D) ذو المعادلة: $y=x+3$ مقارب مائل لـ $(\mathscr C_f)$ بجوار $+\infty$.

ب- أدرس الوضع النسبي لـ (D) والمنحنى $(\mathscr C_f)$:

ندرس إشارة الفرق $f(x)-(x+3)$ على المجال $]-2;+\infty[$.

لدينا: $f(x)-(x+3)=\frac{4}{x+2}$

وأن: $\forall x\in]-2;+\infty[: x+2>0$

إذن: $\forall x\in]-2;+\infty[: f(x)-(x+3)>0$

أي المنحنى $(\mathscr C_f)$ يوجد فوق (D) على المجال $D_f=]-2,+\infty[$.

## التمرين 4

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي: $f(x)=\sqrt{x^2+x}$ و $(\mathscr C_f)$ منحناها في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec i,\vec j)$.

1) أ- حدد $D_f$ مجموعة تعريف الدالة f.

ب- بين أن المستقيم $(\Delta): x=-\frac12$ هو محور تماثل لـ $(\mathscr C_f)$.

2) بين أن المستقيم $(\Delta'): y=x+\frac12$ هو مقارب مائل لـ $(\mathscr C_f)$ بجوار $+\infty$.

الحل ✓

لدينا: $f(x)=\sqrt{x^2+x}$

1) أ- أحدد أولا $D_f$ مجموعة تعريف الدالة f:

$\forall x\in\mathbb R: x\in D_f\Leftrightarrow x^2+x\geq 0$

نعتبر: $P(x)=x(x+1)$، إذن إشارة P(x) هي كالتالي: جذرا الحدودية هما -1 و 0

| x | -∞ | | -1 | | 0 | | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| P(x) | | + | 0 | − | 0 | + | |

وبالتالي: $D_f=]-\infty;-1]\cup[0;+\infty[$

ب- أبين أن $(\Delta): x=-\frac12$ هو محور تماثل لـ $(\mathscr C_f)$:

أولا أبين أن: لكل x من $D_f$: $2a-x\in D_f$ حيث $a=-\frac12$

لكل x من $D_f$ لدينا: $x\in[0;+\infty[$ أو $x\in]-\infty;-1]$

لدينا: $2a-x=-1-x$

إذا كان $x\in[0;+\infty[$ فإن: $-1-x\leq -1$ يعني $-1-x\in D_f$ (لأن: $x\geq 0$ يعني $-x\leq 0$)

إذا كان $x\in]-\infty;-1]$ فإن: $-1-x\geq 0$ يعني $-1-x\in D_f$ (لأن: $x\leq -1$ يعني $-x\geq 1$)

وبالتالي: لكل x من $D_f$ لدينا: $2a-x\in D_f$

أبين أن: $\forall x\in D_f: f(2a-x)=f(x)$

لدينا: $f(2a-x)=f(-1-x)=\sqrt{(-1-x)^2-1-x}$

$=\sqrt{1+2x+x^2-1-x}$

$=\sqrt{x^2+x}=f(x)$

إذن يتحقق الشرطان، إذن المستقيم $(\Delta): x=-\frac12$ هو محور تماثل لـ $(\mathscr C_f)$.

2) أبين أن المستقيم $(\Delta'): y=x+\frac12$ هو مقارب مائل بجوار $+\infty$:

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+x=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(x+\frac12\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+x}-\left(x+\frac12\right)\right]$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+\cancel{x}-\cancel{x^2}-\cancel{x}-\frac14}{\sqrt{x^2+x}+x+\frac12}=0$

(لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+x+\frac12\right)=+\infty$)

إذن المستقيم $(\Delta'): y=x+\frac12$ هو مقارب مائل لـ $(\mathscr C_f)$ بجوار $+\infty$.

## التمرين 5

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb R\setminus\{-2\}$ بما يلي: $f(x)=\frac{1-x^2}{2+x}$ و $(\mathscr C_f)$ منحناها في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec i,\vec j)$.

1) بين أن النقطة $I(-2;4)$ هي مركز تماثل لـ $(\mathscr C_f)$.

2) أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathscr C_f)$.

الحل ✓

لدينا f معرفة على $\mathbb R\setminus\{-2\}$

1) أبين أن النقطة $I(-2;4)$ هي مركز تماثل للمنحنى $(\mathscr C_f)$.

لدينا: $D_f=]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$

• أبين أن: لكل x من $D_f$: $2a-x\in D_f$ حيث: $a=-2$

و $2a-x=-4-x$

لكل x من $D_f$: $x\in]-\infty;-2[$ أو $x\in]-2;+\infty[$

- حالة $x\in]-\infty;-2[$: يعني $x<-2$ يعني $-x>2$ يعني $-4-x>-2$

إذن: $-4-x\in D_f$

- حالة $x\in]-2;+\infty[$: يعني $x>-2$ يعني $-x<2$ يعني $-4-x<-2$

إذن: $-4-x\in D_f$

ومنه: $\forall x\in D_f: 2a-x=-4-x\in D_f$

• أبين أن: $\forall x\in D_f: f(2a-x)=2b-f(x)$ حيث $b=4$

لدينا: $f(-4-x)=\frac{1-(-4-x)^2}{2-4-x}=\frac{1-16-8x-x^2}{-2-x}$

$=\frac{x^2+8x+15}{x+2}$

ومن جهة أخرى: $2b-f(x)=8-\frac{1-x^2}{2+x}=\frac{16+8x-1+x^2}{x+2}$

$=\frac{x^2+8x+15}{x+2}$

إذن: لكل x من $D_f$: $f(-4-x)=8-f(x)$

ومنه النقطة $I(-2;4)$ مركز تماثل المنحنى $(\mathscr C_f)$.

2) أدرس الفروع اللانهائية لـ $(\mathscr C_f)$:

• لدينا: $\lim\limits_{x\to-2^-}(2+x)=0^-$ و $\lim\limits_{x\to-2^-}(1-x^2)=-3$

إذن: $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=+\infty$

ولدينا كذلك: $\lim\limits_{x\to-2^+}(2+x)=0^+$ و $\lim\limits_{x\to-2^+}(1-x^2)=-3$

إذن: $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=-\infty$

وبالتالي فالمستقيم ذو المعادلة: $x=-2$ مقارب عمودي لمنحنى الدالة f.

• لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-x^2}{2+x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x^2}{x}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$

ولدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-x^2}{x(2+x)}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{x^2}{x^2}\right)=-1$

و $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1-x^2}{2+x}+x\right)$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1-x^2+2x+x^2}{2+x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x}{x}=2$

إذن المستقيم ذو المعادلة: $(D): y=-x+2$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr C_f)$ بجوار $-\infty$.

• ولدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-x^2}{2+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$

ولدينا: بنفس الطريقة السابقة:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+x)=2$

إذن المستقيم ذو المعادلة: $(D): y=-x+2$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr C_f)$ بجوار $+\infty$.

ملاحظة: لدينا: مركز التماثل I ينتمي إلى (D) إذن يمكن أن نستنتج أن (D) مقارب مائل بجوار $+\infty$ دون حساب النهايات.

## التمرين 6

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي: $f(x)=\frac{1}{x^2(x-1)}$ و $(\mathscr C_f)$ منحناها في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec i,\vec j)$.

أدرس منحى تغيرات f وتقعر المنحنى $(\mathscr C_f)$ وحدد نقط الانعطاف (إن وجدت).

الحل ✓

لدينا: $f(x)=\frac{1}{x^2(x-1)}$

• أحدد أولا $D_f$:

$\forall x\in\mathbb R: x\in D_f\Leftrightarrow x^2(x-1)\neq 0$

$\Leftrightarrow x\neq 0$ و $x\neq 1$

إذن: $D_f=\mathbb R\setminus\{0;1\}$

$=]-\infty;0[\cup]0;1[\cup]1;+\infty[$

• أحسب $f'(x)$ و $f''(x)$ لكل x من $D_f$.

الدالة f جذرية، إذن فهي قابلة للاشتقاق على كل مجال ضمن $D_f$.

لدينا: $\forall x\in D_f: f'(x)=\frac{-(x^2(x-1))'}{x^4(x-1)^2}$

$=-\frac{2x(x-1)+x^2}{x^4(x-1)^2}$

$=-\frac{3x^2-2x}{x^4(x-1)^2}$

$=\frac{x(2-3x)}{x^4(x-1)^2}$

$=\frac{2-3x}{x^3(x-1)^2}$

ولدينا f' قابلة أيضا للاشتقاق على كل مجال ضمن $D_f$، إذن:

$\forall x\in D_f: f''(x)=\frac{-3x^3(x-1)^2-[3x^2(x-1)^2+2x^3(x-1)](2-3x)}{x^6(x-1)^4}$

$=\frac{-3x(x-1)-(3(x-1)+2x)(2-3x)}{x^4(x-1)^3}$

$=\frac{-3x^2+3x-(5x-3)(2-3x)}{x^4(x-1)^3}$

$=\frac{-3x^2+3x-10x+15x^2+6-9x}{x^4(x-1)^3}$

$=\frac{12x^2-16x+6}{x^4(x-1)^3}=\frac{2(6x^2-8x+3)}{x^4(x-1)^3}$

• منحى تغيرات f.

ألاحظ أن إشارة $f'(x)$ هي إشارة: $\frac{2-3x}{x^3}$

لدينا: $2-3x\geq 0\Leftrightarrow x\leq\frac23$ إذن:

| x | -∞ | | 0 | | $\frac23$ | | 1 | | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | | − | ‖ | + | 0 | − | ‖ | − | |

إذن f تزايدية على المجال $\left]0;\frac23\right]$ وتناقصية على كل من المجالات $]-\infty;0[$ و $\left[\frac23;1\right[$ و $]1;+\infty[$.

• تقعر $(\mathscr C_f)$:

- إشارة $f''(x)$ هي إشارة: $\frac{6x^2-8x+3}{(x-1)^3}$

مميز الحدودية $6x^2-8x+3$ هو: $\Delta=64-72$

$=-8<0$

إذن: $\forall x\in\mathbb R: 6x^2-8x+3>0$

وبالتالي إشارة $f''(x)$ هي إشارة $x-1$: $f''(x)>0\Leftrightarrow x>1$

خلاصة:

| x | -∞ | | 0 | | 1 | | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f''(x) | | − | ‖ | − | ‖ | + | |
| تقعر $(\mathscr C_f)$ | | مقعر | ‖ | مقعر | ‖ | محدب | |

من خلال الجدول، لدينا: $(\mathscr C_f)$ مقعر على المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;1[$ ومحدب على $]1;+\infty[$

ونلاحظ أن التقعر لا يتغير في أية نقطة، إذن فنقط الانعطاف غير موجودة، وحسابيا: لأن $f''$ لا تنعدم في أية نقطة كما أن $f'$ لا تنعدم مع الاحتفاظ بنفس الرتابة بجوار أية نقطة.