Concours d'accès en 1ère année des ENSA Maroc
Juillet 2013

Epreuve de Mathématiques **Durée : 1H30 min**

Q1. Le comité du concours ENSA sait par expérience que la probabilité de réussir le concours est de 0,95 pour l'étudiant(e) ayant mention "Très bien" au BAC, de 0,5 pour celui ou celle qui a mention "Bien" au BAC et de 0,2 pour les autres. Il estime, de plus, que parmi les candidats au concours ENSA 2013, 35 % ont mention "Très bien" et 50% ont mention "Bien".
Si l'on considère un(e) candidat(e) 2013 au hasard, ayant réussit le concours ENSA, la probabilité pour qu'il (ou elle) n'ait ni mention "Très Bien" ni mention "Bien" est :

A) 0,0144	B) 0,0489	C) 0,1444	D) 0,0498

Q2. Dans le conseil de l'établissement d'une ENSA, il y'a 5 mathématiciens et 6 physiciens. On doit former un comité concours, issu du conseil, composé de 3 mathématiciens et de 3 physiciens. Le règlement impose que les 2 physiciens les plus âgés doivent absolument faire partie du comité. Le nombre de comités différents à former est:

A) 80	B) 60	C) 40	D) 20

Q3. Le reste de la division euclidienne de $1234^{4321} + 4321^{1234}$ par 7 est égale à :

A) 1	B) 2	C) 3	D) 4

Q4. Le nombre $2^{100} - 1$

A) est divisible par 31 et non par 3	B) est divisible par 3 et non par 31	C) est divisible par 3 et par 31	D) n'est divisible ni par 3 ni par 31

Q5. La valeur de la somme

$$S = \sum_{k=1}^{35} k^2$$

est :

A) 14512	B) 14510	C) 14910	D) 14215

Q6. La valeur de la somme

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k(k+1)}$$

est :

A) $\frac{12}{11}$	B) $\frac{11}{10}$	C) $\frac{11}{12}$	D) $\frac{10}{11}$

Q7. On note par $E(x)$ la partie entière du réel x

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} E(7k)$$

A) 7	B) $\frac{7}{2}$	C) $\frac{7}{3}$	D) $\frac{7}{4}$

Q8.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2+(-1)^n} =$$

A) 1	B) $\sqrt{2}$	C) $\sqrt{3}$	D) $+\infty$

Q9. Si z_1, z_2 sont les deux solutions de l'équation complexe

$$z^2 = 5 - 12\,i$$

Alors la quantité $Re(z_1)Im(z_2)$ vaut

A) 6	B) 3	C) -6	D) 0

Q10. La partie imaginaire du nombre complexe

$$z = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$$

est :

A) $\sqrt{3}^{20}$	B) $-512\sqrt{3}$	C) $-20\sqrt{3}$	D) $+512\sqrt{3}$

Q11.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x+x^2}-\sqrt{x}}{\sqrt{3x}\,ln(1+x)} =$$

A) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$	B) $\frac{1}{3\sqrt{3}}$	C) $+\infty$	D) 0

Q12.

$$\lim_{x\to 0} \frac{ln(cos(2x))}{ln(cos(3x))} =$$

A) $\frac{3}{2}$	B) $\frac{2}{3}$	C) $\frac{4}{9}$	D) $\frac{9}{4}$

Q13.

$$\lim_{x\to 0} \frac{ln(x)+x^2}{ln(x+x^2)} =$$

A) 1	B) 0	C) $-\infty$	D) $+\infty$

Q14.

$$\int_0^3 \frac{dx}{3+2^x} =$$

A) $-\frac{\ln(11)}{\ln(8)}$	B) $\frac{5}{3}$	C) $\frac{1}{5}-\frac{\ln(11)}{\ln(8)}$	D) $\frac{5}{3}-\frac{ln(11)}{ln(8)}$

Q15.

$$\int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx =$$

A) $\ln(2)$	B) $\ln(2)-2$	C) $\frac{\pi}{2}$	D) $\ln(2)-2+\frac{\pi}{2}$

Q16.

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx =$$

A) $\frac{\pi}{8}$	B) π	C) 0	D) $\frac{\pi}{16}$

ENSA

Q17. Le plan $\mathcal{E}_2$ est rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soient les points $A(-4,5), B(5,2)$ *et* $C(-2,1)$. La distance du point C à la droite (AB) et égale à :			
A) $\sqrt{5}$	B) $\sqrt{10}$	C) $2\sqrt{10}$	D) $10\sqrt{2}$

Q18. Soit ABC un triangle équilatéral du plan $\mathcal{E}_2$ rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ de coté $4\sqrt{3}$ cm. Si M est un point intérieur quelconque du triangle ABC alors la valeur de la somme des distances de M aux cotés de ABC est			
A) $7\frac{\sqrt{3}}{2}$	B) $6\sqrt{3}$	C) 6	D) $\sqrt{3}$

Q19. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et H_1 et H_2 deux sous espaces vectoriels de E distincts. Si $dim\ E = 4\ et\ dim\ H_1 = dim\ H_2 = 3$, alors $$dim(H_1 \cap H_2) =$$			
A) 0	B) 1	C) 2	D) 3
dim X désigne la dimension de l'espace vectoriel X qui représente le nombre des vecteurs de l'une de ses bases			

Q20. On considère la matrice $$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ La matrice B^{13} vaut			
A) $\begin{pmatrix} 1 & 13 & 91 \\ 0 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	B) $\begin{pmatrix} 1 & 13 & 92 \\ 0 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	C) $\begin{pmatrix} 1 & 13 & 93 \\ 0 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	D) $\begin{pmatrix} 1 & 13 & 94 \\ 0 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Correction du Concours d'entrée en 1ère année du cycle préparatoire

Ecole Nationale Des Sciences Appliquées
2012-2013

Correction mathématique

Q1. On considère les événements : T : ''l'élève ait mention très bien ''

B : ''l'élève ait mention très bien ''

R : ''l'élève ait mention très bien ''

La probabilité qu'un élève n'ait ni la mention « très bien » ni la mention « bien » sachant qu'il a réussi le concours est :

$$
\begin{aligned}
P\left(\overline{T}\cap\overline{B}/R\right) &= \frac{P\left(\left(\overline{T}\cap\overline{B}\right)\cap R\right)}{P(R)} \\
&= \frac{P\left(R/\overline{T}\cap\overline{B}\right)\times P\left(\overline{T}\cap\overline{B}\right)}{P\left(R/\overline{T}\cap\overline{B}\right)\times P\left(\overline{T}\cap\overline{B}\right)+P(R/T)\times P(T)+P(R/B)\times P(B)} \\
&= \frac{0,2\times 0,25}{0,25\times 0,15+0,95\times 0,35+0,5\times 0,5} \\
&= 0,0489
\end{aligned}
$$

Q2. Formé un comité est choisir au hasard 3 mathématicien parmi 5 et un physicien parmi 4, alors le nombre de comités qu'on peut former est : $C_5^3\times C_4^1=40$

Q3. On a

donc

Or donc

].

Q4. On a :

$$
\begin{aligned}
2^3\equiv -1[3] &\Rightarrow 2^{99}\equiv -1[3] \\
&\Rightarrow 2^{100}\equiv -2[3] \\
&\Rightarrow 2^{100}-1\equiv 0[3]
\end{aligned}
$$

Donc $3\,|\,2^{100}-1$

Et on a :

$$\begin{aligned} 2^5 \equiv 1[31] &\Rightarrow 2^{100} \equiv 1[31] \\ &\Rightarrow 2^{100} - 1 \equiv 0[31] \end{aligned}$$

Donc $31 \mid 2^{100} - 1$

Q5. On a :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{35} k^2 \\ &= \frac{35(35+1)(2\times 35+1)}{6} \\ &= 14910 \end{aligned}$$

Q6. Calculons la somme,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{35} \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{35} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{35} \frac{1}{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{35} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{36} \frac{1}{k} \\ &= 1 - \frac{1}{36} \\ &= \frac{35}{36} \end{aligned}$$

Q7. On a $\forall k \in \{1;2;...;n\};\ 7k \in \mathbb{N}$, alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} E(7k) &= \frac{7}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{7}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} E(7k) = \frac{7}{2}$.

Q8. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. On a :

$$\sqrt[n]{2+(-1)^n}=\left(2+(-1)^n\right)^{\frac{1}{n}}$$
$$=e^{\frac{1}{n}\ln\left(2+(-1)^n\right)}$$

Or $\forall n\in\mathbb{N}^*, 1\leq 2+(-1)^n\leq 3$, donc $\forall n\in\mathbb{N}^*, \left|\frac{1}{n}\ln\left(2+(-1)^n\right)\right|\leq\frac{\ln(3)}{n}$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln\left(2+(-1)^n\right)=0$, ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2+(-1)^n}=e^0=1$

Q9. On a z_1, z_2 sont les solutions de l'équation complexe $z^2=5-12i$.

Alors $(z-z_1)(z-z_2)=z^2-(5-12i)$

Alors $\begin{cases}-(z_1+z_2)=0\\ z_1z_2=12i-5\end{cases}$

D'autre part, on a $z_1z_2=Re(z_1)Re(z_2)-Im(z_1)Im(z_2)+i\left(Re(z_1)Im(z_2)+Im(z_1)Re(z_2)\right)$

Ainsi $Re(z_1)Im(z_2)+Im(z_1)Re(z_2)=12$

Or $z_1=-z_2$, alors $Re(z_1)Im(z_2)=Im(z_1)Re(z_2)$

D'où $Re(z_1)Im(z_2)=6$

Q10. On a

$$z=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}=\left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}\right)^{20}$$
$$=\sqrt{2}^{20}\left(e^{i\frac{7\pi}{12}}\right)^{20}$$
$$=2^{10}e^{i\frac{35\pi}{3}}$$
$$=2^{10}e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

Alors $Im(z)=-2^{10}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=-215\sqrt{3}$

Q11. Calculons la limite suivante :

$$\lim_{n\to 0^+} \frac{\sqrt{x+x^2}-\sqrt{x}}{\sqrt{3x}\ln(1+x)} = \lim_{n\to 0^+} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{3}\ln(1+x)}$$

$$= \lim_{n\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{3}\left(\sqrt{1+x}+1\right)} \times \frac{x}{\ln(1+x)} \ :$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Q12.On a :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(2x))}{\ln(\cos(3x))} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(2x))}{\cos(2x)-1} \times \frac{\cos(3x)-1}{\ln(\cos(3x))} \times \frac{\cos(2x)-1}{\cos(3x)-1}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(2x))}{\cos(2x)-1} \times \frac{\cos(3x)-1}{\ln(\cos(3x))} \times \frac{-2\sin^2(x)}{-2\sin^2\left(\frac{3x}{2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(2x))}{\cos(2x)-1} \times \frac{\cos(3x)-1}{\ln(\cos(3x))} \times \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \times \left(\frac{\frac{3x}{2}}{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)}\right)^2 \times \frac{4}{9}$$

Or $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(2x))}{\cos(2x)-1} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(t)}{t-1} = 1$, de même $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(3x)-1}{\ln(\cos(3x))} = 1$

Alors $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(2x))}{\ln(\cos(3x))} = \frac{4}{9}$

Q13. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x)+x^2}{\ln(x+x^2)} = 1$

Q14. On a : $\int_0^3 \frac{dx}{3+2^x} = \int_0^3 \frac{dx}{3+e^{x\ln 2}}$

On pose $t = e^{x\ln 2}$, alors $dt = \ln 2 e^{x\ln 2} dx = t\ln 2 dx$

Donc $dx = \frac{dt}{t\ln 2}$. Et $x=0 \Rightarrow t=1$ et $x=3 \Rightarrow t=2^3$.

Alors

$$\int_0^3 \frac{dx}{3+2^x} = \frac{1}{\ln 2}\int_1^{2^3} \frac{dt}{t(t+3)}$$
$$= \frac{1}{3\ln 2}\int_1^{2^3}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+3}\right)dt$$
$$= \frac{1}{3\ln 2}\left(\left[\ln t\right]_1^{2^3} - \left[\ln(t+3)\right]_1^{2^3}\right)$$
$$= \frac{1}{3\ln 2}(\ln 8 - \ln 11 + \ln 4)$$
$$= 1 - \frac{\ln 11}{\ln 8} + \frac{\ln 4}{\ln 8}$$
$$= 1 - \frac{\ln 11}{\ln 8} + \frac{2}{3}$$
$$= \frac{5}{3} - \frac{\ln 11}{\ln 8}$$

Q15. On a

$$\int_0^1 \ln(1+x^2)dx = \left[x\ln(1+x^2)\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx$$
$$= \left[x\ln(1+x^2)\right]_0^1 - 2\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$
$$= \left[x\ln(1+x^2)\right]_0^1 + 2\left[\arctan(x) - x\right]_0^1$$
$$= \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$$

Q16. On pose $\sin t = x$, alors $dx = \cos t dt$

Donc $x = 0 \Rightarrow t = 0$ et $x = \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$.

Alors :

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\left|\cos t\right|\cos t dt$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(2t)dt$$
$$= \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos(4t))dt$$
$$= \frac{1}{8}\left[t - \frac{1}{4}\sin(4t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{\pi}{16}$$

Q17. Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB) .

On a $d\left(C,(AB)\right) = CH = \sqrt{AC^2 - AH^2}$.

D'autre part, on a $\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}\right| = AB \times AH$, Donc $AH = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right|}{AB}$.

Et puisque $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = 30$, $AB = \sqrt{9^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{10}$ et $AC = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20}$,

alors : $d\left(C,(AB)\right) = \sqrt{20 - \left(\dfrac{30}{3\sqrt{10}}\right)^2} = \sqrt{10}$

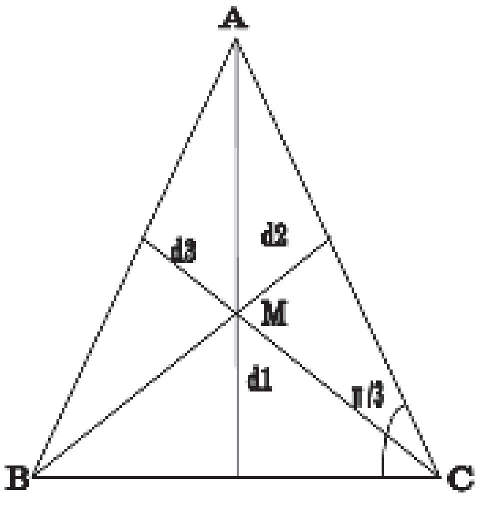
Q18. La surface du triangle (ABC) est : S=

donc donc $\sqrt{3}$ = $\times\sqrt{3}$

D'autre part

Comme

Alors $\times\sqrt{3}$ donc $\sqrt{3}$ $\sqrt{3}$ $4\sqrt{3}$



Q19. On a H_1 et H_2 deux sous espaces vectoriel de E distincts tels que $\dim E = 4$ et $\dim H_1 = \dim H_2 = 3$, alors H_1 et H_2 sont deux hyperplans de l'espace vectoriel E

$\dim\left(H_1 \cap H_2\right) = \dim E - 2 = 2$

Q20. On a $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3+\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}}_{A}$

Alors $B^{13}=\left(I_3+A\right)^{13}=\sum_{k=0}^{13}C_{13}^{k}A^{k}\left(I_3\right)^{13-k}=\sum_{k=0}^{13}C_{13}^{k}A^{k}$

On a $A^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, donc $A^3=0$, ainsi $\forall k\geq 3, A^k=0$

Alors $B^{13}=C_{13}^{0}A^{0}+C_{13}^{1}A+C_{13}^{2}A^{2}=I_3+13A+78A^2$.

D'où $B^{13}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&13&13\\0&0&13\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&78\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&13&91\\0&1&13\\0&0&1\end{pmatrix}$

Correction du Concours d'entrée en 1ère année du cycle préparatoire

Ecole Nationale Des Sciences Appliquées
2012-2013

Fiche de réponses

Epreuve de Mathématique (Durée 1h : 30min)

Nom :……………………………………………
Prénom :…………………………………….. Note ……………………
C. N. E. :………………………………………
N° d'examen : …………………………………

Remarques Importantes :

1) La documentation, les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.
2) Parmi les réponses proposées il n'y en a qu'une qui est juste.
3) Cochez la case qui correspond à la réponse correcte sur cette fiche.
4) Réponse juste = 1 point ; Réponse fausse = - 1 point ; Pas de Réponse = 0 point.
Noter Bien : Plus qu'une case cochée = - 1 point.

	A	B	C	D
Q1		×		
Q2			×	
Q3				×
Q4				×
Q5			×	
Q6		×		
Q7		×		
Q8	×			
Q9	×			
Q10		×		
Q11	×			
Q12			×	
Q13		×		
Q14				×
Q15				×
Q16				×
Q17		×		
Q18			×	
Q19			×	
Q20				×

R^+	R^-