Concours d'accès en 1ère année des ENSA Maroc

Août 2014

Epreuve de Mathématiques **Durée : 1H30 min**

Exercice 1 : Soit u_n et v_n les suites réelles définies par : $u_0 = \alpha\ ,\ v_0 = \beta \quad avec\ \ 0 < \alpha < \beta \quad et\ \ \forall\, n \in \mathbb{N} : \begin{cases} u_{n+1} = \frac{{u_n}^2}{u_n + v_n} \\ v_{n+1} = \frac{{v_n}^2}{u_n + v_n} \end{cases}$ On pose : $x_n = \frac{u_n}{v_n} \qquad et \qquad y_n = u_n - v_n$			
Q1. La suite (x_n) :			
A) Converge vers $\frac{\alpha}{\beta}$	B) Converge vers 1	C) Converge vers 0	D) Diverge
Q2. La suite (y_n) :			
A) Converge vers $\alpha - \beta$	B) Converge vers $\alpha + \beta$	C) Converge vers 0	D) Diverge
Q3. La suite (u_n):			
A) Converge vers α	B) Converge vers β	C) Converge vers 0	D) Diverge
Q4. La suite (v_n):			
A) Converge vers $\alpha - \beta$	B) Converge vers $\beta - \alpha$	C) Converge vers β	D) Diverge
Q5. Soit δ un élément de $]0,1[$. $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} (1 + \delta^{2^k}) =$			
A) 1	B) $+\infty$	C) $\frac{1}{1-\delta}$	D) $\frac{1}{1+\delta}$

ENSA

Exercice 2 :			
Calculer les intégrales suivantes:			
Q6. $\int_0^{\pi} e^t \cos 2t \ dt =$			
A) $\frac{e^{\pi}}{5}$	B) $\frac{e^{\pi}+1}{5}$	C) $\frac{e^{\pi}-2}{5}$	D) $\frac{e^{\pi}-1}{5}$
Q7. $\int_0^{\pi} e^t \cos^2 t \ dt =$			
A) $\frac{e^{\pi}-1}{5}$	B) $\frac{4(e^{\pi}+1)}{5}$	C) $\frac{3(e^{\pi}-1)}{5}$	D) $\frac{e^{\pi}+2}{5}$

Exercice 3:			
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et telle que : $\forall x \in [a,b], f(a+b-x) = f(x)$.			
Q8. L'intégrale $\int_a^b t\, f(t)dt =$			
$A)\ \frac{a+b}{2}\int_a^b f(t)dt$	$B)\ \frac{a-b}{2}\int_a^b f(t)dt$	$C)\ \frac{a}{2}\int_a^b f(t)dt$	$D)\ \frac{b}{2}\int_a^b f(t)dt$
Q9. L'intégrale $\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}dt =$			
A) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$	B) $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$	C) $\frac{\pi}{3}$	D) $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$
Q10. L'intégrale $\int_0^{\pi} \frac{t \sin t}{3+\cos^2 t}dt =$			
A) $\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$	B) $\frac{\pi^2}{6\sqrt{3}}$	C) $\frac{\pi^3}{6\sqrt{3}}$	D) $\frac{\pi^2}{2\sqrt{3}}$

Exercice 4:

On note $a = \frac{\sqrt[3]{41\sqrt{5}+54\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}$, $b = \frac{\sqrt[3]{54\sqrt{3}-41\sqrt{5}}}{\sqrt{3}}$ et $\lambda = a + b$.

Q11. Le produit ab vaut			
A) $\frac{1}{3}$	B) $\frac{2}{3}$	C) $\frac{7}{3}$	D) 1
Q12. λ est solution de l'équation			
A) $x^3 - 7x - 36 = 0$	B) $x^3 + 7x - 21 = 0$	C) $x^3 - 7x = 0$	D) $x^3 - 7x - 35 = 0$
Q13. La valeur de λ est alors			
A) nulle	B) un réel pair	C) un réel impair	D) $\lambda > 4$

Exercice 5:

Un candidat se présentant à un concours, doit répondre d'une manière successive à une série de questions $(Q_n)_{n>0}$. L'épreuve est présentée en ligne et autre que Q_1, l'accès à Q_n n'est possible que si le candidat donne une réponse à Q_{n-1}. On admet que:

- la probabilité de donner une bonne réponse à Q_1 est 0,1.
- pour $n > 1$;
  - si le candidat donne une bonne réponse à Q_{n-1}, la probabilité de donner une bonne réponse à Q_n est 0,8.
  - si le candidat donne une mauvaise réponse à Q_{n-1}, la probabilité de donner une bonne réponse à Q_n est 0,6.

On note pour tout entier naturel n non nul, B_n l'évènement "L'étudiant donne une bonne réponse à la question Q_n" et P_n la probabilité de B_n

Q14. La valeur de P2 est :			
A) 0,52	B) 0,59	C) 0,54	D) 0,62
Q15. L'étudiant a répondu correctement à la deuxième question, la probabilité qu'il ait donné une mauvaise réponse à la première vaut			
A) $\frac{27}{37}$	B) $\frac{21}{37}$	C) $\frac{27}{31}$	D) $\frac{21}{31}$
Q16. La probabilité que le candidat ait au moins une bonne réponse aux trois premières questions est			
A) 0,856	B) 0,865	C) 0,685	D) 0,585

Exercice 6: Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$; unité graphique 1cm. Soit A le point d'affixe $3i$. On appelle f l'application qui, à tout point M d'affixe z, distinct de A, associe le point M' d'affixe z' définie par $$z' = \frac{3iz - 7}{z - 3i}$$ On dit que M est invariant si M=M'.			
Q17. f admet deux points invariants B et C et on note z_B et z_C les affixes respectives. Montrer que la somme des parties imaginaires de z_B et z_C vaut			
A) -6	B) 6	C) 5	D) -5
On admet que B et C sont tels que $\lvert im(z_B)\rvert > \lvert im(z_C)\rvert$ et on appelle $\mathcal{E}$ le cercle de diamètre $[BC]$. Soit M un point quelconque de $\mathcal{E}$ différent de B et de C et M' son image par f			
Q18. Il existe un réel Θ tel que l'affixe z de M s'écrit			
A) $3i - 4e^{i\Theta}$	B) $-3i - 4e^{i\Theta}$	C) $3i + 4e^{-i\Theta}$	D) $3i + 4e^{i\Theta}$
Q19. Il existe un réel Θ tel que l'affixe z' de M' s'écrit			
A) $3i - 4e^{-i\Theta}$	B) $-3i + 4e^{i\Theta}$	C) $-3i - 4e^{-i\Theta}$	D) $3i + 4e^{-i\Theta}$
Q20. Le point M'			
A) est à l'intérieur du cercle $\mathcal{E}$	B) est à l'extérieur du cercle $\mathcal{E}$	C) appartient au cercle $\mathcal{E}$	D) est le centre du cercle $\mathcal{E}$

Correction du Concours d'entrée en 1ère année du cycle préparatoire

Ecole Nationale Des Sciences Appliquées
2013-2014

Correction mathématique

Exercice 1 :

Q1 . Soit n un élément de $\mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \\ &= \frac{u_n^2}{v_n^2} \\ &= x_n^2 \end{aligned}$$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\forall x \in \mathbb{R}^+ ; f(x) = x^2$.

On a $f([0;1]) = [0;1]$ et $x_0 = \frac{\alpha}{\beta} \in]0;1[$.

Donc par récurrence on a $\forall n \in \mathbb{N} ; x_n \in [0;1]$.

Or $\forall x \in [0;1]; f(x) - x \le 0$, alors la suite (x_n) est décroissante.

D'autre part, on a (x_n) est minorée par 0, donc elle est convergente.

On pose $l = lim(x_n)$. On a $f(l) = l$ et $l \in [0;1]$.

On a $\forall x \in [0;1]; f(x) = x \Leftrightarrow x = 0 \; ou \; x = 1$,Or (x_n) est décroissante alors $l = 0$.

Autrement si $l = 1$ alors $l \le x_0 \prec 1$.Absurde.

Q2 . Soit n un élément de $\mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= u_{n+1} - v_{n+1} \\ &= \frac{u_n^2 - v_n^2}{u_n + v_n} \\ &= u_n + v_n \\ &= y_n \end{aligned}$$

Donc la suite (y_n) est constante, alors $\forall n \in \mathbb{N}\,; y_n = y_0 = \alpha - \beta$.

Ainsi $lim(y_n) = \alpha - \beta$

Q3. On a $\forall n \in \mathbb{N}\,;;\ u_{n+1} = x_n v_n = x_n(u_n - y_n)$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}\,; u_n(x_n - 1) = x_n y_n$. Or $\forall n \in \mathbb{N}\,; x_n \leq x_0 \prec 1$ alors $\forall n \in \mathbb{N}\,; u_n = \dfrac{x_n y_n}{x_n - 1}$

Ainsi la suite (u_n) comme produit de suites convergentes et on a $lim(u_n) = 0$

Q4. La suite (v_n) :

$\forall n \in \mathbb{N}\,; v_n = u_n - y_n$. Alors (v_n) convergente comme somme de suites convergentes. Et on a $lim(v_n) = -lim(y_n) = \beta - \alpha$

Q5.

Soit δ un élément de $]0,1[$

——— = ——— + ———

———=0 et ———= ———————= ———=

———= 1

Donc ———

Exercice 2

Q6 . Calculons $\int_0^{\pi} e^t \cos(2t)\,dt$.

Posons $\begin{cases} u(t) = e^t \\ v'(t) = \cos(2t) \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(t) = e^t \\ v(t) = \dfrac{1}{2}\sin(2t) \end{cases}$

Donc $\int_0^\pi e^t \cos(2t)\,dt = \frac{1}{2}\left[e^t \sin(2t)\right]_0^\pi - \frac{1}{2}\int_0^\pi e^t \sin(2t)\,dt$

De même $\int_0^\pi e^t \sin(2t)\,dt = -\frac{1}{2}\left[e^t \cos(2t)\right]_0^\pi + \frac{1}{2}\int_0^\pi e^t \cos(2t)\,dt$

Alors $\int_0^\pi e^t \cos(2t)\,dt = \frac{1}{2}\left[e^t \cos(2t)\right]_0^\pi + \frac{1}{4}\left[e^t \sin(2t)\right]_0^\pi - \frac{1}{4}\int_0^\pi e^t \cos(2t)\,dt$

D'où $\frac{5}{4}\int_0^\pi e^t \cos(2t)\,dt = \frac{1}{2}\left[e^t \sin(2t)\right]_0^\pi + \frac{1}{4}\left[e^t \cos(2t)\right]_0^\pi = \frac{e^\pi - 1}{4}$.

Ainsi $\int_0^\pi e^t \cos(2t)\,dt = \frac{e^\pi - 1}{5}$

Q7 . On a $\forall t \in \mathbb{R}\,;\ \cos^2(t) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos(2t)\right)$, alors

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi e^t \cos^2(t)\,dt &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(e^t - e^t\cos(2t)\right)dt \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^\pi e^t\,dt - \int_0^\pi e^t \cos(2t)\,dt\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^\pi - 1 - \frac{e^\pi - 1}{5}\right) \\
&= \frac{3\left(e^\pi - 1\right)}{3}
\end{aligned}$$

Exercice 3

Q8 . f une fonction continue sur $[a,b]$ et telle que : $\forall x \in [a,b], f(a+b-x) = f(x)$.

On a $\int_a^b tf(t)\,dt = \int_a^b tf(a+b-t)\,dt$

Posons $u = a+b-t$. Donc $du = -dt$

$$\int_a^b tf(t)\,dt = -\int_b^a (a+b-u)f(u)\,du$$
$$= -\int_b^a (a+b)f(u)\,du + \int_b^a uf(u)\,du$$
$$= (a+b)\int_a^b f(t)\,dt - \int_a^b tf(t)\,dt$$

Donc $\int_a^b tf(t)\,dt = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(t)\,dt$

Q9. On a

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\,dt = \frac{1}{3}\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\left(\frac{\cos t}{\sqrt{3}}\right)^2}\,dt$$
$$= -\frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^{\pi} \frac{\left(\frac{\cos t}{\sqrt{3}}\right)'}{1+\left(\frac{\cos t}{\sqrt{3}}\right)^2}\,dt$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{\cos t}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^{\pi}$$
$$= \frac{2\arctan\left(\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}}$$
$$= \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

Q10. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $\forall t \in [0;1],\ f(t) = \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}$.

On a $\forall t \in [0;1],\ f(\pi+0-t) = \frac{\sin(\pi-t)}{3+\cos^2(\pi-t)} = \frac{\sin(t)}{3+\cos^2(t)}$

donc $\forall t \in [0;1],\ f(\pi+0-t) = f(t)$

Alors d'après la question précédente on a :

$$\int_0^{\pi} \frac{t\sin t}{3+\cos^2 t}\,dt = \int_0^{\pi} tf(t)\,dt$$
$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(t)\,dt$$
$$= \frac{\pi}{2}\times\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$
$$= \frac{\pi^2}{6\sqrt{3}}$$

Exercice 4

Q11. On a $a=\dfrac{\sqrt[3]{41\sqrt{5}+54\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}$, $b=\dfrac{\sqrt[3]{54\sqrt{3}-41\sqrt{5}}}{\sqrt{3}}$ et $\lambda=a+b$.

On a $ab=\dfrac{\sqrt[3]{\left(41\sqrt{5}+54\sqrt{3}\right)\times\left(54\sqrt{3}-41\sqrt{5}\right)}}{3}=\dfrac{\sqrt[3]{54^2\times3-41^2\times5}}{3}=\dfrac{7}{3}$

Q12 . On a

$$\lambda^3-7\lambda=(a+b)^3-7(a+b)$$
$$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3-7a-7b$$
$$=a^3+3a\times\frac{7}{3}+3b\times\frac{7}{3}+b^3-7a-7b$$
$$=a^3+b^3$$
$$=\frac{41\sqrt{5}+54\sqrt{3}+54\sqrt{3}-41\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$$
$$=36$$

Donc $\lambda^3-7\lambda-36=0$

Q13

- On a $0^3-7\times0-36=-36$ alors $\lambda\neq0$.
- donc λ est impaire

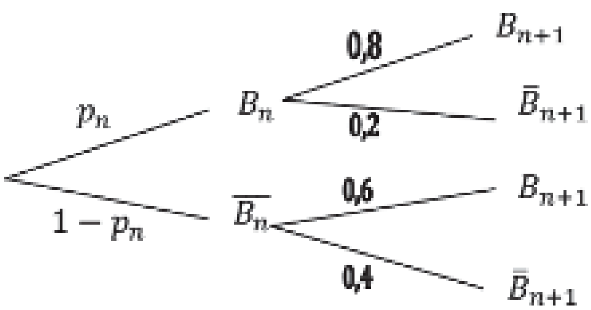
Exercice 5

Q14.

$$p_2 = p\left(\frac{B_2}{B_1}\right) \times p(B_1) + p\left(\frac{B_2}{\overline{B_1}}\right) \times p\left(\overline{B_1}\right)$$
$$= 0,8 \times 0,1 + 0,6 \times 0,9$$
$$= 0,62$$

Q15. On à :

Avec,



Q16. D’après la question précédente on écrit :

Exercice 6

Q17. Soit $M(z)$ un point invariant par f, alors $f(M) = M$.

On a :

$$f(M) = M \Leftrightarrow z = \frac{3iz - 7}{z - 3i}$$
$$\Leftrightarrow z^2 - 6iz + 7 = 0$$

On a $\Delta = (-6i)^2 - 28 = -64 = (8i)^2$

Alors

$$f(M)=M \Leftrightarrow z=\frac{6i-8i}{2} \text{ ou } z=\frac{6i+8i}{2}$$
$$\Leftrightarrow z=-i \text{ ou } z=7i$$

Donc $\operatorname{Im}(z_B)+\operatorname{Im}(z_c)=-1+7=6$.

Q18 . On a $z_B=7i$ et $z_B=-i$.

On a le cercle ε et de diamètre $R=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}|z_B-z_C|=4$ et de centre $\Omega(3i)$.

Ainsi si $M(z)\in\varepsilon$ alors $\exists\theta\in\mathbb{R}$, $z=3i+4e^{i\theta}$ *ou* $z=3i+4e^{-i\theta}$.

Q19. On a

$$\begin{aligned} z' = \frac{3iz-7}{z-3i} &= \frac{-9+12ie^{i\theta}}{4e^{i\theta}} \\ &= \frac{1}{4}\left(12i-16e^{-i\theta}\right) \\ &= 3i-4e^{-i\theta} \end{aligned}$$

Q20. On a

$$\begin{aligned} z' &= 3i-4e^{-i\theta} \\ &= 3i+4e^{i\pi}e^{-i\theta} \\ &= 3i+4e^{i(\pi-\theta)} \\ &= 3i+4e^{i\theta'} \quad (\theta'=\pi-\theta) \end{aligned}$$

Alors $M'\in\varepsilon$

Correction du Concours d’entrée en 1ère année du cycle préparatoire

Ecole Nationale Des Sciences Appliquées
2013-2014

Fiche de réponses

Epreuve de Mathématique (Durée 1h : 30min)

Nom :……………………………………………
Prénom :……………………………………….. Note ……………………
C. N. E. :………………………………………
N° d’examen : …………………………………

Remarques Importantes :

1) La documentation, les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.
2) Parmi les réponses proposées il n’y en a qu’une qui est juste.
3) Cochez la case qui correspond à la réponse correcte sur cette fiche.
4) Réponse juste = 1 point ; Réponse fausse = - 1 point ; Pas de Réponse = 0 point.
Noter Bien : Plus qu’une case cochée = - 1 point.

	A	B	C	D
Q1			×	
Q2	×			
Q3			×	
Q4		×		
Q5	×			
Q6				×
Q7			×	
Q8	×			
Q9		×		
Q10		×		
Q11			×	
Q12	×			
Q13			×	
Q14				×
Q15			×	
Q16		×		
Q17		×		
Q18			×	
Q19	×			
Q20			×	

R^+	R^-