Université Moulay Ismaïl
Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers — Meknès

CONCOURS D'ENTREE en 1ère Année

Filière : Sciences Mathématiques A et B

Epreuve de Mathématiques

Jeudi 26 Juillet 2012 - Durée : 2h 00mn

Questions à réponse précise, Partie A

NB : Chaque question est notée sur (1Pt)

Questions	Réponses
Trouver la prériode T de la fonction suivante : $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \cos(x)$	
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos^4(4x) - \sin^4(4x) = 1$	
Déterminer a, $b \in \mathbb{R}$ tels que $(1+i)^9 = a + ib$	
Calculer $C = \lim\limits_{n \to +\infty} n \ln \sqrt{\frac{n+1}{n-1}}$	
Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, calculer la dérivée de $g(x) = \exp\left(\left(f\left(x^2\right)\right)^2\right)$	
Soit $E = \mathbb{R} \backslash \{-2\}$ et soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ avec $x \in E$, trouver $f(E)$	
Trouver les maximums et les minimums de la fonction $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \left\|x^2 - x\right\| + \|x\|$	
On donne les points $A(1{,}2)$, $B(-2, 1)$ et $C(0, 4)$. Déterminer l'angle $\widehat{BAC}$ en radian	
Soit x un réel positif. Combien y-a-t-il d'entiers naturels multiples de 3 entre 0 et x ?	
Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $X^5 - 7X^4 - X^2 - 9X + 9$ par $X^2 - 5X + 4$	

NB : Chaque question est notée sur (2Pts)

Questions	Réponses
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\forall x \in [a,b],\ f(a+b-x) = f(x)$. on pose $I = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$ et $J = \displaystyle\int_a^b xf(x)dx$. Calculer J en fonction I.	
Soit E un ensemble, et A, B deux sous ensembles de E. On appelle différence symétrique de A et B, notée $A\Delta B$, le sous-ensemble de E : $A\Delta B = \{x \in A \cup B \ / \ x \notin A \cap B\}$. Calculer $A\Delta E$ et $A\Delta C_E^A$	
Le périmètre d'un triangle isocèle vaut **1**. Déterminer les dimensions de ce triangle pour que son aire soit la plus grande possible.	
On note $u_n = 25^n + 2^{3n+4}$. Trouver a, $b \in \mathbb{Z}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$	
Calculer $D = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2-2}dx$	
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$. Soit k un entier compris entre 1 et n. Utiliser l'égalité $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ pour calculer S_n.	
Soit x un réel et $E(x)$ la partie entière de x. Déterminer $F = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{E(x) + E(2x) + E(3x) + \cdots E(nx)}{n^2}$	
De combien de façon peut-on payer 10 DHS avec des pièces de 10 et 20 centimes ? (1 DH = 100 centimes)	
Soient x_1, x_2 et x_3 les racines de $x^3 + 2x - 1 = 0$, calculer $X = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$	
Le 1er juin 2012, les participants d'un club d'astronomie ont observé le corps céleste $\mathcal{A}$ qui apparait tout les 51 jours. Le 28 juin 2012, ils ont observé le corps céleste $\mathcal{B}$, qui apparait tout les 72 jours. A quelle date devront-ils fixer une nouvelle réunion pour observer simultanément les deux corps?	
Déterminer un cercle de centre Ω et de rayon R tangent aux trois droites d'équations respectives : $y = 2x+1$, $y = 2x+7$ et $y = -\frac{1}{2}x$	

Université Moulay Ismaïl

Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers — Meknès

CONCOURS D'ENTREE en 1ère Année

Filière : Sciences Mathématiques A et B

Epreuve de Mathématiques

Jeudi 26 Juillet 2012 - Durée : 2h 00mn

Questions à réponse précise, Partie A

NB : Chaque question est notée sur (1Pt)

Questions	Réponses
Trouver la prériode T de la fonction suivante : $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \cos(x)$	$f(x+4\pi) = \sin\left(2\pi + \frac{x}{2}\right) + \cos(x+4\pi)$ $= f(x)$ $\Rightarrow T = 4\pi$
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos^4(4x) - \sin^4(4x) = 1$	$S = \left\{ \frac{k\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$
Déterminer a, $b \in \mathbb{R}$ tels que $(1+i)^9 = a + ib$	$a = b = 16$
Calculer $C = \lim\limits_{n \to +\infty} n \ln \sqrt{\frac{n+1}{n-1}}$	$C = +\infty$
Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, calculer la dérivée de $g(x) = \exp\left(\left(f(x^2)\right)^2\right)$	$g'(x) = 4x\, f(x^2) \cdot f'(x^2)\, g(x)$
Soit $E = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ et soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ avec $x \in E$, trouver $f(E)$	$f(E) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
Trouver les maximums et les minimums de la fonction $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \lvert x^2 - x \rvert + \lvert x \rvert$	$\underset{x \in [-1,1]}{\mathrm{Max}}\, f(x) = 3$ $\underset{x \in [-1,1]}{\mathrm{Min}}\, f(x) = 0$
On donne les points $A(1,2)$, $B(-2,1)$ et $C(0,4)$. Déterminer l'angle $\widehat{BAC}$ en radian	$\cos \widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2\, AB \cdot AC} = 0{,}02$ $\widehat{BAC} = 1{,}55$ rad
Soit x un réel positif. Combien y-a-t-il d'entiers naturels multiples de 3 entre 0 et x ?	Le nombre des entiers multiples de 3 entre 0 et x est : $E\left(\frac{x}{3}\right) + 1$
Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $X^5 - 7X^4 - X^2 - 9X + 9$ par $X^2 - 5X + 4$	Le quotient : $x^3 - 2x^2 - 14x - 63$ Le reste : $-268x + 261$

Questions à réponse précise, Partie B

NB : Chaque question est notée sur (2Pts)	
Questions	**Réponses**
Soit $f : [a,b] \longrightarrow I\!R$ une fonction continue telle que $\forall x \in [a,b],\ f(a+b-x) = f(x)$. on pose $I = \int_a^b f(x)dx$ et $J = \int_a^b xf(x)dx$. Calculer J en fonction I.	$x = a+b-t$ $J = \int_a^b x f(x)\,dx = \int_b^a -(a+b-t)\, f(t)\,dt$ $= (a+b)I - J$ $\Rightarrow J = \frac{a+b}{2} I$
Soit E un ensemble, et A, B deux sous ensembles de E. On appelle différence symétrique de A et B, notée $A\Delta B$, le sous-ensemble de E : $A\Delta B = \{x \in A\cup B \ / \ x \notin A\cap B\}$. Calculer $A\Delta E$ et $A\Delta C_E^A$	$A\Delta\bar{A} = A\Delta C_E^A = \Omega$ $A\Delta E = (A\cup\Omega)\setminus(A\cap\Omega) = \Omega\setminus A = \bar{A}$
Le périmètre d'un triangle isocèle vaut 1. Déterminer les dimensions de ce triangle pour que son aire soit la plus grande possible.	On a $S(x) = \left(\frac{1}{2} - x\right)\sqrt{x - \frac{1}{4}}$ et sur $\left]\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right[$ $S'(x) = \frac{1-3x}{\sqrt{4x-1}}$, $S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ $AB = AC = BC = 1/3$
On note $u_n = 25^n + 2^{3n+4}$. Trouver $a,\ b \in \mathbb{Z}$ tels que $\forall n \in I\!N,\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$	$a = 33$ et $b = -200$
Calculer $D = \int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2-2}dx$	$D = \sqrt{2}\ln(\sqrt{2}-1)$
Pour $n \in I\!N^*$, on pose $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$. Soit k un entier compris entre 1 et n. Utiliser l'égalité $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ pour calculer S_n.	$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
Soit x un réel et $E(x)$ la partie entière de x. Déterminer $F = \lim_{n\to+\infty} \frac{E(x) + E(2x) + E(3x) + \cdots E(nx)}{n^2}$	$F = \lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{x}{2}$
De combien de façon peut-on payer 10 DHS avec des pièces de 10 et 20 centimes ? (1 DH = 100 centimes)	$(0,50)$; $(1,49)$; ..... ; $(50,0)$, Par suite le nombre de façon est : 51 façons
Soient x_1, x_2 et x_3 les racines de $x^3 + 2x - 1 = 0$, calculer $X = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$	$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3$
Le 1^{er} juin 2012, les participants d'un club d'astronomie ont observé le corps céleste A qui apparait tout les 51 jours. Le 28 juin 2012, ils ont observé le corps céleste B, qui apparait tout les 72 jours. A quelle date devront-ils fixer une nouvelle réunion pour observer simultanément les deux corps?	On pourra observer simultanément les deux corps le : 31 octobre 2012
Déterminer un cercle de centre Ω et de rayon R tangent aux trois droites d'équations respectives : $y = 2x+1$, $y = 2x+7$ et $y = -\frac{1}{2}x$	$\Omega(-1, 2)$ et $R = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ $\Omega\left(-\frac{11}{5}, -\frac{2}{5}\right)$ $R = \frac{3\sqrt{5}}{5}$