CONCOURS D'ACCES EN PREMIERE ANNEE DU CYCLE D'INGENIEURS D'ETAT

24-06-2003

Epreuve de PHYSIQUE

(Durée : 3Heures)

Avertissement

- **Chaque problème doit être traité sur des feuilles séparées.**
- L'appréciation des copies tient compte de la rigueur, de la clarté des raisonnements et de la présentation.
- Encadrer vos résultats.
- Ecrire avec un stylo à bille ou à encre, bleu ou noir.
- Préciser la numérotation de la question traitée.

Le sujet comporte un problème d'électromagnétisme et un exercice d'électrocinétique.

PROBLEME ELECTROMAGNETISME

On se propose d'étudier le comportement d'une onde électromagnétique lorsqu'elle pénètre dans un gaz ionisé qu'on appelle plasma. L'ionisation du gaz peut être produite artificiellement ou naturellement comme dans l'ionosphère, zone de l'atmosphère qui s'étend entre 60 et 1 000 km d'altitude, et présentant une forte densité en ions et en électrons. Cette ionisation est un phénomène déterminant pour les télécommunications car les ondes radioélectriques, courtes et longues, sont réfléchies par les différentes couches de l'atmosphère.

On modélise le plasma par un gaz ionisé électriquement neutre sous faible pression, contenant par unité de volume, N ions positifs de masse M et de charge +e, et N électrons de masse m de charge -e. On pourra considérer le gaz comme un milieu homogène et isotrope de permittivité ε_0 et de perméabilité magnétique μ_0 identiques à celles du vide.

On donne: $e = 1,6.10^{-19}$ C $m = 0,9.10^{-30}$ kg $M = 1,67.10^{-27}$ kg $N = 5.10^{9}$ ions/m^3

La célérité des ondes électromagnétiques dans le vide est: $c = 3.10^{8}$ m/s

$\varepsilon_0 = (36\pi.10^{9})^{-1}$ SI $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ SI.

1) On considère la propagation dans le plasma d'une onde plane progressive monochromatique de pulsation ω de vecteur d'onde k, représentée en notation complexe par le champ électrique :

$$\vec{E}=\vec{E}_0\, e^{i(\omega t-kz)}$$ i est le nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

a) Rappeler l'expression de la force électrique $\vec{f}_e$ s'exerçant sur une particule chargée de charge q en fonction de $\vec{E}$ et q.

b) Rappeler l'expression de la force magnétique $\vec{f}_m$ s'exerçant sur une particule de charge q et de vitesse $\vec{v}$ en fonction de q , $\vec{v}$ et $\vec{B}$.

c) En déduire le rapport des modules (f_m/f_e) en fonction de v et c. A quelle condition l'action sur les charges du champ magnétique de l'onde est-elle très inférieure à celle du champ électrique?

On supposera cette condition vérifiée dans la suite et on négligera la pesanteur et les interactions ion-ion, ion-électron ou électron-électron.

d) Ecrire la relation fondamentale de la dynamique pour un ion positif de vitesse $\vec{v}'$ et pour un électron de vitesse $\vec{v}$.

e) En déduire, en notation complexe, les vitesses $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ en régime sinusoïdal forcé.

f) Montrer que la densité de courant volumique dans le plasma s'écrit $\vec{j}= N.e.(\vec{v}' - \vec{v})$.

g) Montrer que l'on peut caractériser le milieu par une conductivité électrique complexe γ, définie par $\vec{j} = \gamma\vec{E}$, que l'on exprimera en fonction de N, e, m, M et ω . Simplifier l'expression obtenue en comparant les valeurs de m et M. On fera cette approximation dans la suite.

AN: calculer γ si $\omega = 6{,}0\ 10^6$ rad/s.

Dans les questions suivantes, on considère la propagation dans le plasma d'une onde plane monochromatique de pulsation ω, polarisée suivant Ox et se propageant suivant les $z > 0$. On la notera: $\vec{E} = \vec{E}_0\, e^{i(\omega t - kz)}$ avec $\vec{E}_0 = E_0\vec{e}_x$.

On suppose que le plasma est localement neutre ($\rho = 0$) à tout instant.

2) a) Ecrire les équations de Maxwell dans le plasma. En déduire l'équation de propagation vérifiée par $\vec{E}$.

On donne $\mathbf{rot}(\mathbf{rot}\vec{A}) = \mathbf{grad}(\mathrm{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A}$

b) Déterminer la relation de dispersion $k^2 = f(\omega)$ des ondes dans le plasma.

c) Montrer qu'il existe une pulsation caractéristique ω_p au dessous de laquelle la propagation n'est pas possible c'est-à-dire $k^2 < 0$. Exprimer ω_p en fonction de N, e, m, et ε_0. Calculer la valeur numérique de la fréquence f_p correspondante.

3) On suppose dans cette question que l'on a $\omega < \omega_p$.

a) Déterminer l'expression du champ électrique de l'onde, et en déduire celle du champ magnétique.

b) Calculer la distance au bout de laquelle l'amplitude du champ électrique est égale à 1% de son amplitude à l'origine E_0 pour une onde de pulsation $\omega = 10^6$ rad/s.

c) Déterminer le vecteur de Poynting $\vec{R}$ et calculer sa valeur moyenne $<\vec{R}>$ sur une période T. Conclusion?

4) On suppose dans cette question que l'on a $\omega > \omega_p$.

a) Déterminer l'expression du champ $\vec{B}$ de l'onde dans le plasma. Que peut-on dire de l'amplitude de l'onde dans ce cas? Comparer avec les résultats de la question 3).

b) Déterminer la densité volumique de courant $\vec{J}$ ainsi que la vitesse $\vec{v}$ des électrons.

c) Calculer la vitesse de phase v_φ et la vitesse de groupe v_g. En déduire une relation entre v_φ, v_g , et c.

d) Définir le vecteur de Poynting $\vec{R}$ et préciser son unité.

e) Déterminer le vecteur de Poynting $\vec{R}$. En déduire sa valeur moyenne sur une période T en fonction de E_0, ε_0, c, ω, et ω_p.

f) A partir de $\text{div}(\vec{R})$ et des équations de Maxwell établir l'équation locale d'énergie électromagnétique faisant intervenir le vecteur de Poynting $\vec{R}$, la densité de courant $\vec{J}$, et la densité d'énergie électromagnétique u_{em}. Interpréter chacun des termes de cette équation.

On donne pour deux champs de vecteurs $\vec{X}$ et $\vec{Y}$: $\text{div}(\vec{X} \wedge \vec{Y}) = \vec{Y} \cdot \text{rot}\,\vec{X} - \vec{X} \cdot \text{rot}\,\vec{Y}$.

g) On définit une densité totale d'énergie $u = u_{em} + e_c$ où e_c est la densité volumique d'énergie cinétique des électrons. Déterminer u et calculer sa moyenne $< u >$ en fonction de ε_0 et E_0. Quelle relation y a-t-il entre $< u >$ et $<\vec{R}>$?

En déduire, en précisant le raisonnement la vitesse v_e avec laquelle se propage l'énergie. Conclusion?

5) On suppose dans cette question que l'on a $\omega >> \omega_p$. Décrire les caractéristiques de la propagation de l'onde dans le plasma.

6) Une onde plane monochromatique de pulsation ω, d'amplitude E_{0i} polarisée rectilignement suivant Ox, se propage dans le vide vers les $z > 0$. Elle arrive, sous incidence normale, sur la surface de séparation $z = 0$ entre le vide et un plasma analogue à celui étudié dans les questions précédentes. Cette onde donne naissance à une onde réfléchie d'amplitude E_{0r} se propagent dans le vide vers les $z < 0$ et à une onde transmise d'amplitude E_{0t} se propageant dans le plasma vers les $z > 0$. On suppose que les trois ondes ont le même état de polarisation. On se place dans le cas $\omega > \omega_p$ et on notera k_0 et k les modules des vecteurs d'onde dans le vide et dans le plasma.

a) Écrire les expressions de champs électrique et magnétique des ondes incidente, réfléchie et transmise.

b) En utilisant les conditions de passage dans le plan $z = 0$, en déduire les coefficients de réflexion $r = E_{0r} / E_{0i}$ et de transmission $t = E_{0t} / E_{0i}$ en fonction de k et k_0.

c) On peut attribuer au plasma un indice de réfraction défini par $n = c/v_\varphi$. Exprimer n en fonction de ω et ω_p puis donner les expressions de r et t en fonction de n.

d) On définit les coefficients de réflexion et de transmission de l'énergie électromagnétique par $R = P_r / P_i$ et $T = P_t / P_i$; P_i, P_r et P_t sont les puissances rayonnées par les ondes incidente, réfléchie et transmise à travers une surface S située dans le plan $z = 0$.

Calculer R et T en fonction de n. Déterminer une relation entre R et T. Conclusion?

Application numérique: Calculer n, R et T sachant que $\omega = 6{,}0.10^6$ rad/s.

e) La haute atmosphère possède une couche assimilable à un plasma et nommée ionosphère.

Pourquoi est-elle nommée ainsi ? Comment expliquer son existence ?

Expliquer pourquoi il est possible de capter radio BBC (en ondes courtes), sachant que la terre est un « bon » conducteur qui ne peut en aucun cas être traversé par les ondes (faire un schéma).

EXERCICE ELECTROCINETIQUE

On considère le circuit représenté sur la figure ci-dessous où $e(t)$ est une source idéale de tension, R_1 , R_2 et R_3 sont des résistances tel que $R_1 = R_2 = 2R$, $R_3 = R$ et C un condensateur parfait

1) Etablir l'équation différentielle vérifiée par la tension $u(t)$ où t est le temps.

2) Le condensateur étant initialement déchargé, exprimer $u(t)$ dans chacun des cas :

   a) La source délivre un échelon de tension $e(t) = 0$ pour $t < 0$ et $e(t) = E$ pour $t > 0$.

   b) La source délivre une tension sinusoïdale $e(t) = E\cos(\omega t)$, où E et ω des constantes.

3) Dans le cas d'une tension sinusoïdale de pulsation ω déterminer le courant qui circule dans R_2 par application du théorème de Thevenin