

فرض تجريبي من اقتراح أذ سمير لخريسي - مدة الانجاز ساعتان

تمرين 1 :

نعتبر المتتاليات العددية المعرفة كما يلي :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = 2^n u_n \quad \text{و} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = 0; \quad u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4} u_n \quad ; n \geq 0 \end{cases}$$

1) بين أن $(v_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية وحدد حدها العام2) بين أن $(w_n)_{n \geq 0}$ متتالية حسابية وحدد حدها العام3) أوجد الحد العام للمتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ 4) احسب بدلالة n المجموع : $\sum_{k=0}^n u_k$ 5) استنتج حساب المجموع : $\sum_{k=0}^n \frac{k}{2^k}$ تمرين 2 : لكل عدد حقيقي x نعتبر التعبير : $A(x) = \cos(3x) + \sin(2x) - \cos(x)$ 1) بين أن : $\cos(3x) = \cos(x)(4 \cos^2(x) - 3)$ 2) استنتج أن : $A(x) = 2 \sin(x) \cos(3x) (1 - 2 \sin(x))$ 3) حل في IR المعادلة : $A(x) = 0$ 4) حل في $]0; f[$ المعادلة : $A(x) \geq 0$ تمرين 3 : ABC مثلث حيث : $(\sin \hat{A})^2 = (\sin \hat{B})^2 + (\sin \hat{C})^2$ بين أن ABC قائم الزاوية في A

فرض تجريبي من اقتراح أذ سمير لخريسي - مدة الانجاز ساعتان

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = 2^n u_n \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n \quad , \quad \begin{cases} u_0 = 0; \quad u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4} u_n \quad ; n \geq 0 \end{cases} \quad \text{تمرين 1 :}$$

لدينا : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{2} u_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{4} u_n - \frac{1}{2} u_{n+1} = \frac{1}{2} u_{n+1} - \frac{1}{4} u_n = \frac{1}{2} \left(u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n \right) = \frac{1}{2} v_n$

إذن $(v_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول هو $v_0 = u_1 - \frac{1}{2} u_0 = 1$

منه : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = v_0 q^n = \left(\frac{1}{2} \right)^n$

حسب السؤال السابق نستنتج أن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n = \left(\frac{1}{2} \right)^n$

لدينا : $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_{n+1} - w_n = 2^{n+1} u_{n+1} - 2^n u_n = 2^{n+1} \left(u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n \right) = 2^{n+1} \times \left(\frac{1}{2} \right)^n = 2$

إذن $(w_n)_{n \geq 0}$ متتالية حسابية أساسها $r = 2$ وحدها الأول هو $w_0 = 2^0 \times u_0 = 0$

منه : $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = w_0 + r n = 2n$

بمأن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = 2^n u_n$ فإن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{w_n}{2^n} = \frac{2n}{2^n} = \frac{n}{2^{n-1}}$

$$\begin{cases} u_2 = u_1 - \frac{1}{4} u_0 \\ u_3 = u_2 - \frac{1}{4} u_1 \\ u_4 = u_3 - \frac{1}{4} u_2 \\ \dots = \dots \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4} u_n \end{cases} \quad \text{لدينا : } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4} u_n \quad \text{منه :}$$

بجمع هذه المتساويات طرفا بطرف وبعد الاختزال نجد : $u_{n+2} = u_1 - \frac{1}{4} \sum_{k=0}^n u_k$

بالتالي : $\sum_{k=0}^n u_k = 4(u_1 - u_{n+2}) = 4 \left(1 - \frac{n}{2^{n+1}} \right)$

نعلم أن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{n}{2^{n-1}}$ و $\sum_{k=0}^n u_k = 4 \left(1 - \frac{n}{2^{n+1}} \right)$

إذن : $\sum_{k=0}^n \frac{k}{2^{k+1}} = 4 \left(1 - \frac{n}{2^{n+1}} \right)$ منه : $\sum_{k=0}^n \frac{1}{2} \times \frac{k}{2^k} = 4 \left(1 - \frac{n}{2^{n+1}} \right)$ منه : $\frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^n \frac{k}{2^k} \right) = 4 \left(1 - \frac{n}{2^{n+1}} \right)$

بالتالي : $\sum_{k=0}^n \frac{k}{2^k} = 8 \left(1 - \frac{n}{2^{n+1}} \right)$

$$\begin{aligned} \cos(3x) &= \cos(2x + x) \\ &= \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x) \\ &= (2\cos^2(x) - 1)\cos(x) - 2\sin(x)\cos(x)\sin(x) \\ &= \cos(x)(2\cos^2(x) - 1 - 2\sin^2(x)) \\ &= \cos(x)(2\cos^2(x) - 1 - 2(1 - \cos^2(x))) \\ \cos(3x) &= \cos(x)(4\cos^2(x) - 3) \end{aligned}$$

1 لدينا :

$$\begin{aligned} A(x) &= \cos(3x) + \sin(2x) - \cos(x) \\ &= \cos(x)(4\cos^2(x) - 3) + 2\sin(x)\cos(x) - \cos(x) \\ &= \cos(x)(4\cos^2(x) - 3 + 2\sin(x) - 1) \\ &= \cos(x)(4(1 - \sin^2(x)) - 3 + 2\sin(x) - 1) \\ &= \cos(x)(2\sin(x) - 4\sin^2(x)) \\ A(x) &= 2\sin(x)\cos(3x)(1 - 2\sin(x)) \end{aligned}$$

2 لدينا :

$$A(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sin(x)\cos(3x)(1 - 2\sin(x)) = 0 \Leftrightarrow \left(\sin(x) = 0 \text{ ou } \cos(3x) = 0 \text{ ou } \sin(x) = \frac{1}{2} \right)$$

$$A(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} x = kf / k \in \mathbb{Z} \text{ ou } 3x = \frac{f}{2} + kf / k \in \mathbb{Z} \text{ ou} \\ x = \frac{f}{6} + 2kf / k \in \mathbb{Z} \text{ ou } x = f - \frac{f}{6} + 2kf / k \in \mathbb{Z} \end{array} \right)$$

$$A(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} x = kf / k \in \mathbb{Z} \text{ ou } x = \frac{f}{6} + \frac{kf}{3} / k \in \mathbb{Z} \text{ ou} \\ x = \frac{f}{6} + 2kf / k \in \mathbb{Z} \text{ ou } x = \frac{5f}{6} + 2kf / k \in \mathbb{Z} \end{array} \right)$$

3

نعلم أن : $\forall x \in]0; f[\sin(x) > 0$

$$A(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2\sin(x)\cos(3x)(1 - 2\sin(x)) \geq 0 \Leftrightarrow \cos(3x)(1 - 2\sin(x)) \geq 0$$

$$A(x) \geq 0 \Leftrightarrow \cos(3x)(2\sin(x) - 1) \leq 0 \Leftrightarrow \cos(3x)\left(\sin(x) - \frac{1}{2}\right) \leq 0$$

منه :

لدينا : $x \in]0; f[\Leftrightarrow 3x \in]0; 3f[$ منه :

$$\begin{cases} \cos(3x) \geq 0 \\ 3x \in]0; 3f[\end{cases} \Leftrightarrow 3x \in \left[0, \frac{f}{2}\right] \cup \left[\frac{3f}{2}, \frac{5f}{2}\right] \Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{f}{6}\right] \cup \left[\frac{f}{2}, \frac{5f}{6}\right]$$

$$\begin{cases} \sin(x) - \frac{1}{2} \geq 0 \\ x \in]0; f[\end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{f}{6}, \frac{5f}{6}\right] \text{ و}$$

4

x	0	$\frac{f}{6}$	$\frac{f}{2}$	$\frac{5f}{6}$	f
$\cos(3x)$	+	-	+	-	
$\sin(x) - \frac{1}{2}$	-	+	+	-	
$\cos(3x)\left(\sin(x) - \frac{1}{2}\right)$	-	-	+	+	

بالتالي : $S = \left[\frac{f}{2}; f\right]$

تمرين 3 : ABC مثلث حيث : $(\sin \hat{A})^2 = (\sin \hat{B})^2 + (\sin \hat{C})^2$

نعلم أن : $\frac{\sin \hat{A}}{BC} = \frac{\sin \hat{B}}{AC} = \frac{\sin \hat{C}}{AB}$ نضع : $\frac{\sin \hat{A}}{BC} = k$ منه : $k > 0$ (لأن : $0 < \hat{A} < \pi$)

ومنه أيضا : $\frac{\sin \hat{B}}{AC} = k$ و $\frac{\sin \hat{C}}{AB} = k$

$$\begin{aligned} (\sin \hat{A})^2 &= (\sin \hat{B})^2 + (\sin \hat{C})^2 \Rightarrow (k BC)^2 = (k AC)^2 + (k AB)^2 \Rightarrow k^2 BC^2 = k^2 AC^2 + k^2 AB^2 \\ (\sin \hat{A})^2 &= (\sin \hat{B})^2 + (\sin \hat{C})^2 \Rightarrow BC^2 = AC^2 + AB^2 \end{aligned}$$

إذن حسب مبرهنة فيثاغورس العكسية فإن ABC قائم الزاوية في A

رياضيات النجّاح
www.naja7math.com