

فرض تجريبي من اقتراح أذ سمير لخريسي - مدة الانجاز ساعتان

تمرين 1 : احسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(1)}{\text{Arctan}(x-1)}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 \sqrt[3]{x+7} - 2}{1-x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$$

تمرين 2 : نعتبر الدالة العددية المعرفة كما يلي : $f(x) = \text{Arctan}\left(\frac{2x}{|x^2-1|}\right)$ 1) بين أن f دالة فردية2) بين أن f تقبل تمديدا بالاتصال في النقطتين 1 و -1(نعتبر فيما يلي g الدالة التي تمثل هذا التمديد على IR)3) بين أن : $\forall x \in [0;1[$ $f(x) = 2 \text{Arctan}(x)$ وأن : $\forall x \in]1; +\infty[$ $f(x) = \pi - 2 \text{Arctan}(x)$ 4) ادرس قابلية اشتقاق g في العدد 1 وأول النتيجة المحصل عليها.5) ضع جدول تغيرات الدالة g على $[0; +\infty[$ 6) نعتبر الدالة h قصور g على $J =]1; +\infty[$ 7) بين أن h تقابل من I نحو مجال J يجب تحديده8) حدد $h^{-1}(x)$ لكل x من J

$$f_n : \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow IR$$

تمرين 3 : من أجل n عدد صحيح طبيعي غير منعدم نعتبر الدالة العددية :

$$x \rightarrow \tan x - x - n$$

1) ضع جدول تغيرات الدالة f_n .2) أ- بين أن المعادلة : $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n .ب- تحقق أن $f_n(\alpha_{n+1}) = 1$ ثم استنتج أن المتتالية $(\alpha_n)_n$ تزايدية قطعيا.ج- بين أن المتتالية $(\alpha_n)_n$ متقاربة وحدد نهايتها.

فرض تجريبي من اقتراح أذ سمير لخريسي - مدة الانجاز ساعتان

تمرين 1: احسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^3 - t^2}{t^3 + t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^3}{t^3} = 1 \quad \text{منه:} \quad t = \sqrt[6]{x} \quad \text{نضع:}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 \sqrt[3]{x+7} - 2}{1-x^2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 (\sqrt[3]{x+7} - 2) + 2x^4 - 2}{1-x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 (x+7-8)}{(1-x)(1+x) \left((\sqrt[3]{x+7})^2 + 2\sqrt[3]{x+7} + 4 \right)} + 2 \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{1-x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^4}{(1+x) \left((\sqrt[3]{x+7})^2 + 2\sqrt[3]{x+7} + 4 \right)} - 2(x^2+1) = \frac{-1}{2 \times 12} - 4 = \frac{-97}{24} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(1)}{\text{Arctan}(x-1)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(1)}{x-1} \quad \text{لدينا:} \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{Arctan}(x-1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u}{\tan(u)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\tan(u)}{u}} = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{نضع: } \text{Arctan}(x-1) = u \quad \text{فوجد:} \\ \text{و نضع: } \text{Arctan}(x) = v & \quad \text{فوجد:} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{v - \frac{\pi}{4}}{\tan(v) - \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{\tan(v) - \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{v - \frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(1)}{\text{Arctan}(x-1)} = \frac{1}{2} \quad \text{بالتالي:}$$

تمرين 2: نعتبر الدالة العددية المعرفة كما يلي: $f(x) = \text{Arctan}\left(\frac{2x}{|x^2-1|}\right)$

$$Df = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 1 \neq 0\} =]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[\quad \text{لدينا:}$$

$$x \in Df \Rightarrow x^2 \neq 1 \Rightarrow (-x)^2 \neq 1 \Rightarrow -x \in Df \quad \text{الآن لدينا من جهة}$$

$$\text{ومن جهة أخرى: } f(-x) = \text{Arctan}\left(\frac{-2x}{|(-x)^2-1|}\right) = -2\text{Arctan}\left(\frac{2x}{|x^2-1|}\right) = -f(x) \quad \text{بالتالي: } \forall x \in Df \quad f \text{ دالة فردية}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{Arctan} \left(\frac{2x}{|x^2 - 1|} \right) = \frac{\pi}{2} \quad \text{لدينا: 2}$$

$$\left(\lim_{y \rightarrow +\infty} \operatorname{Arctan}(y) = \frac{\pi}{2} \quad \text{مع العلم أن: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{|x^2 - 1|} = +\infty \quad \text{منه: } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} |x^2 - 1| = 0^+ \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \operatorname{Arctan} \left(\frac{2x}{|x^2 - 1|} \right) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{وأيا:}$$

$$\begin{cases} g(x) = \operatorname{Arctan} \left(\frac{2x}{|x^2 - 1|} \right); & |x| \neq 1 \\ g(1) = \frac{\pi}{2}; & g(-1) = -\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{إذن: } f \text{ تقبل تمديدا بالاتصال معرف كما يلي:}$$

$$\forall x \in [0; 1[\quad \tan(2 \operatorname{Arctan}(x)) = \frac{2 \tan(\operatorname{Arctan}(x))}{1 - \tan^2(\operatorname{Arctan}(x))} = \frac{2x}{1 - x^2} = \frac{2x}{|1 - x^2|} = \tan(f(x)) \quad \text{لدينا: 3}$$

$$\forall x \in]1; +\infty[\quad \tan(\pi - 2 \operatorname{Arctan}(x)) = \tan(-2 \operatorname{Arctan}(x)) = -\tan(2 \operatorname{Arctan}(x)) = \frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{2x}{|1 - x^2|} = \tan(f(x))$$

$$x \in [0; 1[\Rightarrow 0 \leq \operatorname{Arctan}(x) < \operatorname{Arctan}(1) \Rightarrow 0 \leq \operatorname{Arctan}(x) < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 \leq 2 \operatorname{Arctan}(x) < \frac{\pi}{2} \quad \text{ولدينا:}$$

$$\begin{aligned} x \in]1; +\infty[&\Rightarrow \operatorname{Arctan}(1) < \operatorname{Arctan}(x) < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} < \operatorname{Arctan}(x) < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < 2 \operatorname{Arctan}(x) < \pi \\ &\Rightarrow -\pi < -2 \operatorname{Arctan}(x) < -\frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \pi - 2 \operatorname{Arctan}(x) < \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

ولكون الدالة: $x \mapsto \tan x$ تقابلا في المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ فإننا نستنتج أن:

$$\forall x \in [0; 1[\quad \begin{cases} \tan(2 \operatorname{Arctan}(x)) = \tan(f(x)) \\ 0 < f(x) < \frac{\pi}{2}; \quad 0 < 2 \operatorname{Arctan}(x) < \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \forall x \in [0; 1[\quad f(x) = 2 \operatorname{Arctan}(x)$$

$$\forall x \in]1; +\infty[\quad \begin{cases} \tan(\pi - 2 \operatorname{Arctan}(x)) = \tan(f(x)) \\ 0 < f(x) < \frac{\pi}{2}; \quad 0 < \pi - 2 \operatorname{Arctan}(x) < \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \forall x \in]1; +\infty[\quad f(x) = \pi - 2 \operatorname{Arctan}(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \operatorname{Arctan}(x) - \frac{\pi}{2}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} 2 \frac{\operatorname{Arctan}(x) - \frac{\pi}{4}}{x - 1}$$

(انظر التمرين الأول)

$$\begin{aligned} &= \lim_{\substack{t \rightarrow \frac{\pi}{4} \\ t < \frac{\pi}{4}}} 2 \frac{t - \frac{\pi}{4}}{\tan(t) - \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 2 \times \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

لدينا: 4

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\pi - 2\text{Arctan}(x) - \frac{\pi}{2}}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\frac{\pi}{2} - 2\text{Arctan}(x)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} -2 \frac{\text{Arctan}(x) - \frac{\pi}{4}}{x - 1} = -1 \text{ و}$$

إذن g قابلة للاشتقاق يمين و يسار 1 لكنها غير قابلة للاشتقاق في 1

$$(\Delta_2): \begin{cases} y = -(x-1) + \frac{\pi}{2} \\ x > 1 \end{cases} \text{ و } (\Delta_1): \begin{cases} y = (x-1) + \frac{\pi}{2} \\ x < 1 \end{cases} \text{ وبذلك فمنحنى الدالة } g \text{ يقبل نصفي مماس معادلتهما:}$$

$$\forall]1; +\infty[\quad f(x) = \text{Arctan}\left(\frac{2x}{x^2 - 1}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{2}{\frac{x^2 - 1}{x}}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{2}{x - \frac{1}{x}}\right) \text{ لدينا: } 5$$

$$x > y \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{y} \Rightarrow -\frac{1}{x} > -\frac{1}{y} \Rightarrow x - \frac{1}{x} > y - \frac{1}{y} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x - \frac{1}{x}} < \frac{2}{y - \frac{1}{y}} \Rightarrow \text{Arctan}\left(\frac{2}{x - \frac{1}{x}}\right) < \text{Arctan}\left(\frac{2}{y - \frac{1}{y}}\right) \text{ : لدينا ، }]1; +\infty[\text{ ليكن } x \text{ و } y \text{ عددين من}$$

$$\Rightarrow f(x) < f(y)$$

إذن f تناقصية قطعاً على $]1; +\infty[$

$$\forall]0; 1[\quad f(x) = \text{Arctan}\left(\frac{2x}{-x^2 + 1}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{2}{-x + \frac{1}{x}}\right) \text{ و}$$

$$x > y \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} < \frac{1}{y} \\ -x < -y \end{cases} \Rightarrow -x + \frac{1}{x} < -y + \frac{1}{y} < 0 \Rightarrow \frac{2}{x - \frac{1}{x}} > \frac{2}{y - \frac{1}{y}}$$

ليكن x و y عددين من $]0; 1[$ ، لدينا :

$$\Rightarrow \text{Arctan}\left(\frac{2}{-x + \frac{1}{x}}\right) > \text{Arctan}\left(\frac{2}{-y + \frac{1}{y}}\right) \Rightarrow f(x) > f(y)$$

إذن f تزايدية قطعاً على $]0; 1[$

🌟 ستلاحظ أن التعريف يكفي في أحيان كثيرة لدراسة رقابة دالة خصوصاً أن الدالة العكسية لدالة الظل ($\text{Arctan } x$) لم يتم تحديد مشتقتها في درس الاتصال والنهاية، بمعنى لا يمكن الآن استعمال الاشتقاق لدراسة الرقابة.

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		+	=
$g(x)$			$\frac{\pi}{2}$
	0		0

6) الدالة h متصلة على $[1; +\infty[$ و تناقصية قطعاً عليه إذن فهي تقابل من I نحو

$$J = h([1; +\infty[) = \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x); h(1) \right] = \left] 0; \frac{\pi}{2} \right]$$

7) لدينا: $h(1) = \frac{\pi}{2}$ منه: $h^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ ، ولكل $x \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$

$$h^{-1}(x) = y \Leftrightarrow h(y) = x \Leftrightarrow \pi - 2\text{Arctan}(y) = x \Leftrightarrow \pi - 2\text{Arctan}(y) = x \Leftrightarrow \text{Arctan}(y) = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} = \cotan\left(\frac{x}{2}\right)$$

خلاصة: $h(x) = \begin{cases} \cotan\left(\frac{x}{2}\right); x \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[\\ h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$ أو أيضاً: $\forall x \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[h(x) = \cotan\left(\frac{x}{2}\right)$ (لأن: $\cotan\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$)

تمرين 3: من أجل n عدد صحيح طبيعي غير منعدم نعتبر الدالة العددية:

$$f_n: \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \tan x - x - n$$

الدالة f_n قابلة للاشتقاق على $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ ولدينا: $f_n'(x) = 1 + \tan^2(x) - 1 = \tan^2(x) \geq 0$

إذن فهي تزايدية على I ولكون المعادلة $f_n'(x) = 0$ تقبل عدداً معدوداً من الحلول (الصفير فقط) فإننا نستنتج أن f_n تزايدية قطعاً على I

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
$f_n'(x)$		+
$f_n(x)$	$-\infty$	$+\infty$

نعتبر المجال: $\left[0; \text{Arctan}\left(n + \frac{\pi}{2}\right) \right] \subset I$ ، الدالة f_n متصلة عليه ولدينا: $f_n(0) = -n < 0$

$$f_n\left(\text{Arctan}\left(n + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \tan\left(\text{Arctan}\left(n + \frac{\pi}{2}\right)\right) - \text{Arctan}\left(n + \frac{\pi}{2}\right) - n = n + \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(n + \frac{\pi}{2}\right) - n$$

$$= \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(n + \frac{\pi}{2}\right) > 0$$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة فإن المعادلة: $f_n(x) = 0$ تقبل حلاً α_n على الأقل في $\left[0; \text{Arctan}\left(n + \frac{\pi}{2}\right) \right]$

إذن فهي تقبل حلاً α_n على الأقل في I وبما أنها تزايدية قطعاً على I فإن هذا الحل وحيد.

$$\text{لدينا: } f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0 \text{ أي: } \tan(\alpha_{n+1}) - \alpha_{n+1} - (n+1) = 0$$

$$\text{ومنه: } \tan(\alpha_{n+1}) - \alpha_{n+1} - n = 1 \text{ أي } f_n(\alpha_{n+1}) = 1$$

الآن لدينا: $f_n(\alpha_n)=0$ و $f_n(\alpha_{n+1})=1$ إذن: $f_n(\alpha_{n+1}) > f_n(\alpha_n)$ ولكون f_n تزايدية قطعاً فإننا نستنتج أن:
إذن: $\alpha_{n+1} > \alpha_n$ تزايدية قطعاً.

بما أن المتتالية $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تزايدية قطعاً ومكبورة ب $\frac{\pi}{2}$ (لأن: $\alpha_n \in I$) فهي متقاربة ولتكن نهايتها l
لدينا: $\forall n \in \mathbb{N} \alpha_n = \text{Arctan}(\alpha_n + n)$ منه: $\forall n \in \mathbb{N} \tan(\alpha_n) - \alpha_n - n = 0$

بما أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = l$ فإن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n + n = +\infty$ منه: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Arctan}(\alpha_n + n) = \frac{\pi}{2}$ بالتالي: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \frac{\pi}{2}$