فروض النجاح استعدادا لاجتياز فروضك	الأعداد العقدية	السنة 2 بكالوريا علوم رياضية

فرض تجريبي من اقتراح أذ سمير لخريسي - مدة الانجاز ساعتان

تمرين 1 : نعتبر في C المعادلة : $(E):\ z^2-2\boldsymbol{i}z-\boldsymbol{i}-1=0$

1) حل في C المعادلة (E)

2) اكتب على الشكل المثلثي a و b حلي المعادلة (E) ($\mathrm{Img}(a)>0$)

3) أ) تحقق أن : $\left|\frac{b}{a}\right|=\tan\frac{®}{8}$

ب) استنتج حساب $\tan\frac{®}{8}$

4) في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط : $A(a)$ و $B(b)$ و $C(\boldsymbol{i})$ و $D(-1)$ و $P(p)$ (مع $p\in C$)

أ) تحقق أن C منتصف $[AB]$

ب) بين أن المثلث OAB قائم الزاوية في O

ج) بين أن النقط A و B و D مستقيمية

د) حدد العدد العقدي p علما أن : $|\boldsymbol{i}p+1|=|p|=1$

تمرين 2 : في المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$

ونعتبر التطبيق f الذي يربط كل نقطة $M(z)$ من $(P)\setminus(O,\vec{v})$ بالنقطة $M'(z')$ بحيث : $z'=\frac{z-\bar{z}}{z+\bar{z}}z$

1) بين أن f لا يقبل أي نقطة صامدة

2) حدد (K) مجموعة النقط $M'(z')$ حيث $z'=0$

3) حدد (P) مجموعة النقط $M'(z')$ حيث $|z'|=|z|$

4) بين أن المستقيم له اتجاه ثابت يجب تحديده

5) بين أن : $(OM)\perp(OM')$

6) اعط طريقة هندسية لإنشاء النقطة M' انطلاقا من النقطة M

7) نفرض أن : $z=re^{-i}$ حيث $r\in IR^{*+}$ و $\frac{®}{2}<-<®$ ، اكتب z' على الشكل المثلثي

تمرين 3 : نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقط $A(a)$ و $B(b)$ و $C(c)$

حيث a و b و c أعداد عقدية مختلفة مثنى مثنى

ليكن F التطبيق الذي يربط كل نقطة $M(z)$ من (P) بالنقطة $M'(z')$ حيث $z'=wz+a-aw$. $(w\in C^*)$

1) حدد طبيعة التطبيق و عناصره المميزة في الحالات التالية : $w=5$ ، $w=1$ ، $w=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}$

2) نأخذ فيما يلي : $w=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}$ ونعتبر النقط $M(m)$ و $N(n)$ و $P(p)$ حيث : $M=F(B)$ و $C=F(N)$ و $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}$

أ) احسب m بدلالة a و b

ب) تحقق أن $\frac{w-1}{w}=w$ ثم استنتج أن : $n=w(a-c)+c$

ج) احسب p بدلالة a و b و c

د) بين أن PBC مثلث متساوي الأضلاع

فرض تجريبي من اقتراح أذ سمير لخريسي ـ مدة الانجاز ساعتان

تمرين 1 : $(E):\ z^2-2iz-i-1=0$

1

لدينا : $\Delta=-4+4(i+1)=4i=2(2i)=2(1+i)^2=\left(\sqrt{2}(1+i)\right)^2$

منه : $z_1=a=\dfrac{2i+\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}=\dfrac{\sqrt{2}+\left(2+\sqrt{2}\right)i}{2}$ و $z_2=b=\dfrac{2i-\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}=\dfrac{-\sqrt{2}+\left(2-\sqrt{2}\right)i}{2}$

بالتالي : $S=\left\{\dfrac{\sqrt{2}+\left(2+\sqrt{2}\right)i}{2}\ ;\ \dfrac{-\sqrt{2}+\left(2-\sqrt{2}\right)i}{2}\right\}$

2

$$a=i+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}i}{2}=e^{\frac{\pi}{2}i}+e^{\frac{\pi}{4}i}=e^{\frac{3\pi}{8}i}\left(e^{\frac{\pi}{8}i}+e^{\frac{-\pi}{8}i}\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{\frac{3\pi}{8}i}=\left[2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right);\frac{3\pi}{8}\right]$$

$$b=i-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}i}-e^{\frac{\pi}{4}i}=e^{\frac{3\pi}{8}i}\left(e^{\frac{\pi}{8}i}-e^{\frac{-\pi}{8}i}\right)=2i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{\frac{3\pi}{8}i}$$

$$b=2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{\frac{\pi}{2}i}e^{\frac{3\pi}{8}i}=\left[2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right);\frac{7\pi}{8}\right]$$

3

أ) تحقق أن : $\left|\dfrac{b}{a}\right|=\dfrac{2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}=\tan\dfrac{\pi}{8}$

ب)

$$\tan\frac{\pi}{8}=\left|\frac{b}{a}\right|=\frac{|b|}{|a|}=\frac{\sqrt{\dfrac{2+\left(2-\sqrt{2}\right)^2}{4}}}{\sqrt{\dfrac{2+\left(2+\sqrt{2}\right)^2}{4}}}=\sqrt{\frac{2+4-4\sqrt{2}+2}{2+4+4\sqrt{2}+2}}$$

$$\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}{4-2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}-2}{2}=\sqrt{2}-1$$

4

$A(a)$ و $B(b)$ و $C(i)$ و $D(-1)$ و $P(p)$ (مع $p\in C$)

أ) لدينا : $\dfrac{z_A+z_B}{2}=\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{2i}{2}=i=z_C$ منه : C منتصف $[AB]$

ب) لدينا : $\dfrac{z_B-z_O}{z_A-z_O}=\dfrac{b}{a}=\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right)e^{\frac{7\pi}{8}i-\frac{3\pi}{8}i}=\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right)e^{\frac{\pi}{2}i}=\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right)i$ منه : $\dfrac{z_B-z_O}{z_A-z_O}\in iIR$

بالتالي المثلث OAB قائم الزاوية في O

ج) لدينا : $\dfrac{z_B-z_D}{z_A-z_D}=\dfrac{b+1}{a+1}=\dfrac{\dfrac{-\sqrt{2}+\left(2-\sqrt{2}\right)i}{2}+1}{\dfrac{\sqrt{2}+\left(2+\sqrt{2}\right)i}{2}+1}=\dfrac{2-\sqrt{2}+\left(2-\sqrt{2}\right)i}{2+\sqrt{2}+\left(2+\sqrt{2}\right)i}=\dfrac{\left(2-\sqrt{2}\right)(1+i)}{\left(2+\sqrt{2}\right)(1+i)}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$

منه : $\dfrac{z_B-z_D}{z_A-z_D}\in IR$ بالتالي أن النقط A و B و D مستقيمية

لاحظ أن الشكل الجبري هذه المرة هو مفتاح الحل، لذلك يجب دائما محاولة استعمال الشكلين الجبري و الهندسي في الأسئلة للتعرف على الشكل الذي سيفي بالغرض.

د) طريقة 1

$|ip+1|=|p|=1\ \Leftrightarrow\ |i(p-i)|=|p|=1\ \Leftrightarrow\ |p-i|=|p|=1\ \Leftrightarrow\ CP=OP$

إذن P هي إحدى نقطتي تقاطع الدائرتين $(O;1)$ و $(C;1)$ ،

و بما أن : $OC=1$ فإن المثلث OCP مثلث متساوي الأضلاع

طريقة 2

بعد إنشاء شكل بسيط نجد أن : $p=\left[1;\frac{\pi}{6}\right]=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$ أو $p=\left[1;\frac{5\pi}{6}\right]=\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$

$$\left|i\,p+1\right|=\left|p\right|=1 \Leftrightarrow \begin{cases} p\,\overline{p}=1 \\ (i\,p+1)(-i\,\overline{p}+1)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p\,\overline{p}=1 \\ p\,\overline{p}+i\,p-i\,\overline{p}+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p\,\overline{p}=1 \\ i\,p-i\,\overline{p}+1=0 \end{cases}$$

$$\left|i\,p+1\right|=\left|p\right|=1 \Leftrightarrow \begin{cases} p\,\overline{p}=1 \\ i\,p^2-i\,\overline{p}\,p+p=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p\,\overline{p}=1 \\ i\,p^2+p-i=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p\,\overline{p}=1 \\ p^2-i\,p-1=0 \end{cases}$$

$$\Delta=-1+4=3 \Rightarrow p=\frac{i+\sqrt{3}}{2} \quad ou \quad p=\frac{i-\sqrt{3}}{2}$$

أحيانا الحل الهندسي يكون أبسط

<u>تمرين 2</u> : في المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$

و نعتبر التطبيق f الذي يربط كل نقطة $M(z)$ من $(P)\setminus(O,\vec{v})$ بالنقطة $M'(z')$ بحيث : $z'=\frac{z-\overline{z}}{z+\overline{z}}z$

1 $M\in(P)\setminus(O,\vec{v}) \Rightarrow z\neq 0$ منه : $z'=z \Rightarrow \frac{z-\overline{z}}{z+\overline{z}}z=z \Rightarrow \frac{z-\overline{z}}{z+\overline{z}}=1 \Rightarrow z-\overline{z}=z+\overline{z} \Rightarrow \overline{z}=0 \Rightarrow z=0$

و هذا غير ممكن، بالتالي f لا يقبل أي نقطة صامدة

2 $z\in IR \Leftrightarrow z=\overline{z} \Leftrightarrow \frac{z-\overline{z}}{z+\overline{z}}z=0 \Leftrightarrow z'=0$ ، بالتالي (K) هو المحور الحقيقي محروم من النقطة O

3 نضع $z=x+i\,y$ حيث : $(x,y)\in IR^2$

$$|z'|=|z| \Leftrightarrow \left|\frac{z-\overline{z}}{z+\overline{z}}z\right|=|z| \Leftrightarrow |z-\overline{z}|=|z+\overline{z}| \Leftrightarrow |2\,i\,y|=|2\,x| \Leftrightarrow |y|=|x| \Leftrightarrow y=x \ ou \ y=-x$$

إذن (P) هو اتحاد المستقيمين $(\Delta_1):y=x$ و $(\Delta_2):y=-x$ محروم من النقطة O

4 لدينا : $z'-z=\frac{z-\overline{z}}{z+\overline{z}}z-z=\left(\frac{z-\overline{z}}{z+\overline{z}}-1\right)z=\frac{-2\,\overline{z}}{z+\overline{z}}z=\frac{-2\,z\,\overline{z}}{z+\overline{z}}\in IR$

ما يعني أن $z'-z=\frac{-2\,z\,\overline{z}}{z+\overline{z}}\times 1=\frac{-2\,z\,\overline{z}}{z+\overline{z}}z_{\vec{u}}$ أي أن $\overrightarrow{MM'}$ و $\vec{u}$ مستقيميتان

أي أن المستقيم (MM') له اتجاه ثابت هو اتجاه المحور الحقيقي

5 لدينا : $\frac{z'}{z}=\frac{z-\overline{z}}{z+\overline{z}}=\frac{y}{x}i \in i\,IR$ منه $(OM)\perp(OM')$

6 إذا كانت M نقطة من المحور الحقيقي فإن $M'=O$

إذا كانت M نقطة خارج المحور الحقيقي، فإن M' خي نقطة تقاطع المستقيم المار من M و الموازي للمحور الحقيقي مع المستقيم المار من O و العمودي على (OM)

7 $$z'=\frac{z-\overline{z}}{z+\overline{z}}z=\frac{r\,e^{\theta i}-r\,e^{-\theta i}}{r\,e^{\theta i}+r\,e^{-\theta i}}r\,e^{\theta i}=r\frac{2\,i\sin\theta}{2\cos\theta}e^{\theta i}=r\tan\theta\; e^{\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)i}=r\,(-\tan\theta)e^{\left(\theta+\frac{\pi}{2}+\pi\right)i}$$

$$z'=\left[-r\tan\theta\;;\theta+\frac{3\pi}{2}\right]$$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi \Rightarrow \tan\theta<0$ و هذا سبب إدراج الإشارة لأن الشكل الهندسي يتوجب أن يكون المعيار موجبا

<u>تمرين 3</u> : $A(a)$ و $B(b)$ و $C(c)$ ، $M(z)$ ، $M'(z')$ / $M'=F(M)$ $(w\in C^*)$ $z'=w\,z+a-aw$

1
- الحالة : $w=5$ ، $z'=5\,z-4a$

F هو تحاك نسبته 5 و مركزه هي النقطة الصامدة أي النقطة ذات اللحق : a أي النقطة A

- الحالة : $w=1$ ، $z'=z$ ، F هو التطبيق المطابق
- الحالة : $w=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، $z'=e^{\frac{\pi}{3}i}\,z+a-ae^{\frac{\pi}{3}i}$ أي : $z'-a=e^{\frac{\pi}{3}i}\,(z-a)$

		F هو الدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\circledR}{3}$	
2		$w = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، $M(m)$ و $N(n)$ و $P(p)$ ، $M = F(B)$ ، $C = F(N)$ ، $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}$	
	أ)	$M = F(B) \Rightarrow m = wb + (1-w)a$	
	ب)	لدينا : $w^2 - w + 1 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1 = 0$ منه : $w^2 = w - 1$ منه : $\frac{w-1}{w} = w$ لدينا $C = F(N)$ منه : $c = w(n-a) + a = wn + (1-w)a$ منه : $n = \frac{c-(1-w)a}{w} = \frac{c - wc + wc}{w} + \frac{w-1}{w}a = \frac{(1-w)c}{w} + c + wa = -wc + c + wa = w(a-c) + c$	
	ج)	لدينا : $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}$ منه : $p - a = m - a + n - a$ منه : $p = m + n - a = wb + (1-w)a + w(a-c) + c - a = wb + (1-w)c$	
	د)	لدينا $p = wb + (1-w)c = w(b-c) + c$ منه : $P = R\left(C, \frac{\circledR}{3}\right)(B)$ بالتالي PBC مثلث متساوي الأضلاع	