

فرض تجريبي مساهمة من أحد أصدقاء موقع رياضيات النجاح - مدة الانجاز ساعتان

تمرين 1 :

(1) لكل x من IR نضع $I(x) = \int_0^x e^t \cos(2t) dt$ ، مستعملا مكاملة بالأجزاء احسب $I(x)$ بدلالة x

(2) احسب نهاية المتتالية العددية $(v_n)_{n \geq 1}$ المعرفة كما يلي: $\forall n \in IN^* \quad v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{\frac{kf}{n}} \cos\left(\frac{2kf}{n}\right)$

تمرين 2 :

نعتبر في C المعادلة: $(E): z^2 + 2(1-i\sqrt{3})z - 4(1+i\sqrt{3}) = 0$
الجزء الأول

(1) بين أن مميز المعادلة (E) هو $\Delta = 16 e^{\frac{f}{3}i}$

(2) ليكن z_1 و z_2 حلي (E) حيث $\text{Re}(z_1) > 0$

(3) حدد كلا من z_1 و z_2 على الشكل الجبري

(4) بين أن: $z_1^2 = 4(-\sqrt{3} + i)$ وأن: $z_2 = i z_1$

(5) اكتب z_1^2 على الشكل المثلثي

(6) استنتج أن: $z_1 = \left[2\sqrt{2}; \frac{5f}{12}\right]$ ثم اكتب z_2 على الشكل المثلثي

الجزء الثاني

في المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ نعتبر النقطتين A و B ذات اللحقين z_1 و z_2 على التوالي و نعتبر R الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{f}{2}$ ، صورة $M(z)$ بالدوران R

(1) بين أن $R(A) = B$

(2) أ) بين أن: $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM}') \equiv \frac{f}{2} + (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) [2f]$

ب) حدد (T) مجموعة النقط $M(z)$ التي من أجلها تكون M و B و M' مستقيمية.

تمرين 3 :

الجزء الأول

نعتبر الدالة g المعرفة على IR^* بما يلي: $g(x) = 1 + \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}}$

(1) ادرس تغيرات g على IR^* ثم ضع جدول تغيراتها

(2) استنتج أن $\forall x \in IR^* \quad g(x) > 0$

الجزء الثاني

نعتبر الدالة f المعرفة على IR بما يلي:
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{1+e^x}; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(1) بين أن f متصلة في الصفر

(2) بين أن f قابلة للاشتقاق على IR^* وأن: $\forall x \in IR^* \quad f'(x) = \frac{g(x)}{\left(1+e^x\right)^2}$

(3) استنتج أن f تزايدية قطعاً على IR

الجزء الثالث

نعتبر الدالة F المعرفة على $[1; +\infty[$ بما يلي : $F(x) = \int_1^{x^2} f(t) dt$

- 1) بين أن لكل x من $[1; +\infty[$: $f(c_x) = \frac{1}{x^2 - 1} F(x)$ ($\exists c_x \in]1; x^2[$)
- 2) استنتج أن لكل x من $[1; +\infty[$: $(x^2 - 1)f(1) \leq F(x) \leq (x^2 - 1)f(x^2)$
- 3) استنتج أن F قابلة للاشتقاق يمين 1
- 4) بين أن F قابلة للاشتقاق على $]1; +\infty[$ و حدد F'

الجزء الرابع

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بما يلي : $u_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{f(t)}{t^3} dt$

- 1) بين أن $(u_n)_{n \geq 1}$ تزايدية قطعاً
- 2) باستعمال مكاملة بتغيير المتغير بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \int_1^n \left(1 - \frac{e^u}{1 + e^u} \right) du$
- 3) استنتج u_n بدلالة n ثم احسب نهاية $(u_n)_{n \geq 1}$

فرض تجريبي مساهمة من أحد أصدقاء موقع رياضيات النجاح - مدة الانجاز ساعتان

تمرين 1 :

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_0^x e^t \cos(2t) dt = \int_0^x (e^t)' \cos(2t) dt = [e^t \cos(2t)]_0^x - \int_0^x e^t (\cos(2t))' dt \\ &= [e^t \cos(2t)]_0^x + 2 \int_0^x e^t \sin(2t) dt = [e^t \cos(2t)]_0^x + 2 \int_0^x (e^t)' \sin(2t) dt \\ &= [e^t \cos(2t)]_0^x + 2 \left([e^t \sin(2t)]_0^x - \int_0^x e^t (\sin(2t))' dt \right) \end{aligned}$$

$$I(x) = [e^t \cos(2t) + 2e^t \sin(2t)]_0^x - 2 \left(2 \int_0^x e^t \cos(2x) dt \right) = [e^t (\cos(2t) + 2\sin(2t))]_0^x - 4 I(x)$$

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_0^x e^t \cos(2t) dt = \int_0^x (e^t)' \cos(2t) dt = [e^t \cos(2t)]_0^x - \int_0^x e^t (\cos(2t))' dt \\ &= [e^t \cos(2t)]_0^x + 2 \int_0^x e^t \sin(2t) dt = [e^t \cos(2t)]_0^x + 2 \int_0^x (e^t)' \sin(2t) dt \\ &= [e^t \cos(2t)]_0^x + 2 \left([e^t \sin(2t)]_0^x - \int_0^x e^t (\sin(2t))' dt \right) \end{aligned}$$

بالتالي :

$$I(x) = \frac{1}{5} [e^t (\cos(2t) + 2\sin(2t))]_0^x = \frac{(\cos(2x) + 2\sin(2x)) e^x - 1}{5}$$

1

على المجال $[0; f]$ الدالة $g : x \rightarrow e^x \cos(2x)$ قابلة للاشتقاق على IR ولدينا : $\forall x \in IR g'(x) = e^x (\cos(2x) - 2\sin(2x))$ ، ولكون الدالة g' متصلة على $[0; f]$ فهي محدودة

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{\frac{kf}{n}} \cos\left(\frac{2kf}{n}\right) = \frac{1}{f} \frac{f}{n} \sum_{k=1}^n e^{\frac{kf}{n}} \cos\left(\frac{2kf}{n}\right) = \frac{1}{f} \frac{f-0}{n} \sum_{k=1}^n g\left(0+k\frac{f-0}{n}\right)$$

عليه، بالتالي :

$$v_n = \frac{1}{f} \int_0^f g(t) dt = \frac{I(f)}{f} = \frac{e^f - 1}{5f}$$

2

$$(E): z^2 + 2(1-i\sqrt{3})z - 4(1+i\sqrt{3}) = 0$$

تمرين 2 :

الجزء الأول

$$\Delta = 4(1-i\sqrt{3})^2 + 16(1+i\sqrt{3}) = 4(1-2i\sqrt{3}-3+4+4i\sqrt{3}) = 4(2+2i\sqrt{3}) = 16\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 16e^{\frac{f}{3}i}$$

1

أحد الجذرين المربعين لـ Δ هو : $u = 4e^{\frac{f}{6}i} = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

$$z_1 = \frac{-2(1-i\sqrt{3}) + 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)}{2} = -1 + i\sqrt{3} + \sqrt{3} + i = \sqrt{3} - 1 + (\sqrt{3} + 1)i$$

منه :

$$z_2 = \frac{-2(1-i\sqrt{3}) - 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)}{2} = -1 + i\sqrt{3} - \sqrt{3} - i = -\sqrt{3} - 1 + (\sqrt{3} - 1)i$$

و :

$$z_1^2 = (\sqrt{3} - 1 + (\sqrt{3} + 1)i)^2 = (\sqrt{3} - 1)^2 + 2(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)i - (\sqrt{3} + 1)^2$$

$$z_1^2 = 4 - 2\sqrt{3} + 4i - (4 + 2\sqrt{3}) = -4\sqrt{3} + 4i = 4(-\sqrt{3} + i)$$

لدينا :

$$i z_1 = i(\sqrt{3} - 1 + (\sqrt{3} + 1)i) = i(\sqrt{3} - 1) - (\sqrt{3} + 1) = z_2$$

و :

$$z_1^2 = 4(-\sqrt{3} + i) = 8\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \left[8, \frac{5f}{6}\right]$$

4

بما أن: $z_1^2 = \left[8, \frac{5f}{6}\right]$ فإن: $z_1 = \left[\sqrt{8}, \frac{5f}{12}\right]$ أو $z_1 = \left[\sqrt{8}, \frac{5f}{12} + f\right]$

أي: $z_1 = \left[2\sqrt{2}, \frac{5f}{12}\right]$ أو $z_1 = \left[2\sqrt{2}, \frac{17f}{12}\right]$

ولكن وبما أن $\operatorname{Re}(z_1) > 0$ و $\operatorname{Re}\left(\left[2\sqrt{2}, \frac{17f}{12}\right]\right) = 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{17f}{12}\right) < 0$ فإن: $z_1 = \left[2\sqrt{2}, \frac{5f}{12}\right]$

منه: $z_2 = i z_1 = \left[1, \frac{f}{2}\right] \left[2\sqrt{2}, \frac{5f}{12}\right] = \left[1 \times 2\sqrt{2}, \frac{5f}{12} + \frac{f}{2}\right] = \left[2\sqrt{2}, \frac{11f}{12}\right]$

الجزء الثاني

$A(z_1)$ و $B(z_2)$ الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{f}{2}$ ، صورة $M'(z')$ بالدوران R

الكتابة العقديّة للدوران R هي $z' = i z$

بما أن: $z_2 = i z_1$ فإن: $B = R(A)$

لدينا لكل $z \neq z_1$ و $z \neq z_2$ و $z' = i z$ و $z_2 = i z_1$ منه: $\frac{z' - z_2}{z - z_2} = \frac{i z - i z_1}{z - z_2} = i \frac{z - z_1}{z - z_2}$

منه: $\arg\left(\frac{z' - z_2}{z - z_2}\right) \equiv \arg(i) + \arg\left(\frac{z - z_1}{z - z_2}\right) [2f]$ أي: $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM'}) \equiv \frac{f}{2} + (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) [2f]$

إذا كانت $M = A$ أو $M = B$ فالنقط M و B و M' مستقيمية.
إذا كانت $M \neq A$ أو $M \neq B$ فإن:

$$M \in (T) \Leftrightarrow ((\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM'}) \equiv 0 [2f] \text{ ou } (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM'}) \equiv f [2f])$$

$$M \in (T) \Leftrightarrow \left(\frac{f}{2} + (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) \equiv 0 [2f] \text{ ou } \frac{f}{2} + (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) \equiv f [2f]\right)$$

$$M \in (T) \Leftrightarrow \left((\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) \equiv -\frac{f}{2} [2f] \text{ ou } (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) \equiv \frac{f}{2} [2f]\right)$$

$$M \in (T) \Leftrightarrow (BM) \perp (AM)$$

خلاصة: (T) هي الدائرة ذات القطر $[AB]$

الجزء الأول

تمرين 3:

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad g(x) = 1 + \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}}$$

الدالة g متصلة وقابلة للاشتقاق على \mathbb{R}^* ، ولدينا:

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad g'(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) \times \frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} + \left(\frac{-1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{-1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}} \left(1 + \frac{1}{x} + 1\right) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \left(\frac{2x+1}{-x}\right)$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
$2x+1$	-	0	+	+
$-x$	+	+	0	-
$g'(x)$	-	0	+	-
$g(x)$	$\frac{e^2 - 1}{e^2}$			

ليس مطلوباً إدراج النهايات في المحدثات في جدول التغيرات ما دام لم يرد حسابها في أي سؤال سابق.

لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1 + 1 = 2$ بما أن الدالة g تناقصية قطعاً على $]0; +\infty[$ فإن: $g(x) > 2$ $\forall x \in]0; +\infty[$

ولدينا : $\forall x \in]-\infty; 0[g(x) > \frac{e^2 - 1}{e^2}$ ، بالتالي : $\forall x \in \mathbb{R}^* g(x) > 0$

الجزء الثاني

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

لدينا : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 0$ $\left(\frac{0+}{1+0} \right)$ و $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 0$ $\left(\frac{0+}{+\infty} \right)$

بالتالي : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$ ، ما يعني أن f متصلة في الصفر

بما أن الدوال : $x \mapsto x$ و $x \mapsto 1+e^{\frac{1}{x}}$ قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}^* وحيث أن : $\forall x \in \mathbb{R}^* 1+e^{\frac{1}{x}} \neq 0$ فإن f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}^* ولدينا :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* f'(x) = \left(\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} \right)' = \frac{1+e^{\frac{1}{x}} - x \left(\frac{-1}{x^2} \right) e^{\frac{1}{x}}}{\left(1+e^{\frac{1}{x}} \right)^2} = \frac{1+e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}}}{\left(1+e^{\frac{1}{x}} \right)^2} = \frac{g(x)}{\left(1+e^{\frac{1}{x}} \right)^2}$$

سبق وبرهنا أن $\forall x \in \mathbb{R}^* g(x) > 0$ منه : $\forall x \in \mathbb{R}^* f'(x) > 0$ ولكون : $f'(0) = 0$ فإن : $\forall x \in \mathbb{R} f'(x) \geq 0$ و $x=0 \Leftrightarrow f'(x) = 0$ (أي أن المشتقة تنعدم في عدد محدود من الحلول) بالتالي f تزايدية قطعاً على \mathbb{R}

الجزء الثالث

$$\forall x \in [1; +\infty[F(x) = \int_1^{x^2} f(t) dt$$

ليكن $x \in [1; +\infty[$ ، بما أن الدالة $t \mapsto f(t)$ متصلة على $[1; x^2]$ فإن : $(\exists c_x \in]1; x^2[) f(c_x) = \frac{1}{x^2 - 1} F(x)$ أي : $(\exists c_x \in]1; x^2[) f(c_x) = \frac{1}{x^2 - 1} \int_1^{x^2} f(t) dt$

بالتالي : $(\forall x > 1) (\exists c_x \in]1; x^2[) f(c_x) = \frac{1}{x^2 - 1} F(x)$

ليكن $x \in [1; +\infty[$ إذن : $(\exists c_x \in]1; x^2[) f(c_x) = \frac{1}{x^2 - 1} F(x)$ بما أن f تزايدية قطعاً على \mathbb{R} فإن :

$$1 < c_x < x^2 \Rightarrow f(1) < f(c_x) < f(x^2) \Rightarrow f(1) < \frac{1}{x^2 - 1} F(x) < f(x^2) \Rightarrow (x^2 - 1)f(1) \leq F(x) \leq (x^2 - 1)f(x^2)$$

بالنسبة لـ $x=1$ المتفاوتة صحيحة

بالتالي : لكل x من $[1; +\infty[$: $(x^2 - 1)f(1) \leq F(x) \leq (x^2 - 1)f(x^2)$

لدينا : $(F(1) = 0) \quad \forall x > 1 \quad (x+1)f(1) \leq \frac{F(x) - F(1)}{x-1} \leq (x+1)f(x^2)$

وبما أن : $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (x+1)f(1) = 2f(1)$ و $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (x+1)f(x^2) = 2f(1)$ فإن : $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{F(x) - F(1)}{x-1} = 2f(1)$

بالتالي F قابلة للاشتقاق يمين 1 ولدينا : $F'_d(1) = 2f(1) = \frac{2}{1+e}$

بما أن $f(t) \mapsto t$ متصلة على $[1; x^2]$ فإن $F(x)$ معرفة لكل $x \geq 1$ و قابلة للاشتقاق على $[1; +\infty[$ وبوضع : $\forall x \in [1; +\infty[U(x) = \int_1^x f(t) dt$ فإن : $\forall x \in [1; +\infty[F(x) = U(x^2)$

$$\forall x \in]1; +\infty[\quad F'(x) = 2xU'(x^2) = 2xf(x^2) = \frac{2x^3}{1+e^{\frac{1}{x^2}}} \quad \text{منه :}$$

الجزء الرابع

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{f(t)}{t^3} dt$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} - u_n = \int_{\frac{1}{n+1}}^1 \frac{f(t)}{t^3} dt - \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{f(t)}{t^3} dt = \int_{\frac{1}{n+1}}^1 \frac{f(t)}{t^3} dt + \int_1^{\frac{1}{n}} \frac{f(t)}{t^3} dt = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{f(t)}{t^3} dt \quad \text{لدينا :}$$

$$\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{f(t)}{t^3} dt > 0 \quad \text{فإن :} \left[\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n} \right] \text{ موجبة قطع على } t \mapsto \frac{f(t)}{t^3}$$

بالتالي $(u_n)_{n \geq 1}$ تزايدية قطعاً

1

$$\begin{cases} t = \frac{1}{n} \Rightarrow u = n \\ t = 1 \Rightarrow u = 1 \end{cases} \quad \text{نضع :} \quad u = \frac{1}{t} \quad \text{منه :} \quad t = \frac{1}{u} \quad \text{منه :} \quad dt = \frac{-1}{u^2} du \quad \text{و}$$

$$u_n = \int_n^1 \frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{\frac{1}{u^3}} \left(\frac{-1}{u^2}\right) du = - \int_n^1 u f\left(\frac{1}{u}\right) du = - \int_n^1 u \frac{1}{1+e^u} du = \int_n^1 \frac{-1}{1+e^u} du = \int_n^1 \frac{-1-e^u+e^u}{1+e^u} du \quad \text{منه :}$$

2

$$u_n = \int_n^1 \left(-1 + \frac{e^u}{1+e^u} \right) du = \int_1^n \left(1 - \frac{e^u}{1+e^u} \right) du$$

$$u_n = \int_1^n \left(1 - \frac{e^u}{1+e^u} \right) du = \left[u - \ln(1+e^u) \right]_1^n = n - \ln(1+e^n) - 1 + \ln(2) = \ln(2) - 1 - \ln\left(\frac{1+e^n}{e^n}\right)$$

3

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln(2) - 1 - \ln(1) = \ln(2) - 1 \quad \text{بالتالي :}$$