

مسألة (10 نقط)

الجزء (A) : I (1) بين أن :

$$(0.5 \text{ نقطة}) \quad (\forall x \in]-1, +\infty[- \{0\}) : \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{1+t} dt = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} + \frac{1}{2}$$

$$(2) \text{ بين أن : } (\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) \quad x - 1 - x \ln x \leq 0 \quad (0.5 \text{ نقطة})$$

II لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln x}{x-1} ; & x \neq 1 \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

$$(1) \text{ أ- بين أن } (\forall x \in]-1, +\infty[- \{0\}) : \frac{x}{3(x+1)} \leq \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{1+t} dt \leq \frac{x}{3} \quad (0.75 \text{ ن})$$

$$\text{ب- استنتج أن } f \text{ قابلة للاشتقاق في النقطة } 1 \text{ وأن } f'(1) = -\frac{1}{2} \quad (0.5 \text{ ن})$$

$$(2) \text{ أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى } (C_f) \quad (0.75 \text{ نقطة})$$

$$(3) \text{ أحسب المشتقة } f'(x) \text{ وأنجز جدول تغيرات الدالة } f \quad (0.75 \text{ نقطة})$$

$$(4) \text{ أرسم المنحنى } (C_f) \quad (0.75 \text{ نقطة})$$

الجزء (B) : لتكن F الدالة العددية المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} F(x) = \int_x^{x^2} f(t) dt & x \neq 0 ; x \neq 1 \\ F(0) = 0 & ; F(1) = 0 \end{cases}$$

$$(1) \text{ أ- بين أن } (\forall x \in \mathbb{R}^{+*} - \{1\}) \quad \frac{2x \ln x}{x+1} \leq F(x) \leq x \ln x \quad (0.75 \text{ نقطة})$$

ب- أدرس اتصال وقابلية اشتقاق F على يمين 0 (0.5 نقطة)

ج- أدرس قابلية اشتقاق F في النقطة 1 (0.75 نقطة)

$$(2) \text{ أ- أحسب } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \quad (0.5 \text{ نقطة})$$

$$\text{ب- بين أن } (\forall x \in]1, +\infty[) \quad \ln x \ln(x+1) \leq F(x) \leq 2 \ln x \ln(x+1) \quad (0.75 \text{ ن})$$

ج- بين أن المنحنى Γ_F يقبل عند $+\infty$ فرعاً شلجيمياً اتجاهه محور الأفصيل (0.75 ن)

$$(3) \text{ بين أن } F \text{ قابلة للاشتقاق على } D =]0, 1[\cup]1, +\infty[\quad (1 \text{ نقطة})$$

$$\text{و أن } (\forall x \in D) \quad F'(x) = \frac{(3x-1) \ln x}{x^2 - 1} \quad \text{ثم أنجز جدول تغيرات الدالة } F$$

$$(4) \text{ أرسم المنحنى } \Gamma_F \quad (\text{نأخذ } F(\frac{1}{3}) = -0,44) \quad \Gamma_F \text{ يقبل نقطة انعطاف وحيدة في}$$

$$(I(1,9 ; 1,2)) \quad (0.5 \text{ نقطة})$$

تمرين (3 نقط)

لكل عدد عقدي z يخالف i . نضع $f(z) = \frac{iz}{z-i}$

$$(1) \text{ أ- بين أن } (z \in i\mathbb{R}) \Leftrightarrow (f(z) \in i\mathbb{R}) \quad (0.5 \text{ نقطة})$$

$$\text{ب- حدد المجموعة : } (E_1) = \{M(z) / f(z) \in \mathbb{R}\} \quad (0.5 \text{ نقطة})$$

$$(2) \text{ حل في } \mathbb{C} \text{ المعادلة } f(z) = 1 - 2z \quad (0.5 \text{ نقطة})$$

$$(3) \text{ نضع } z - i = re^{i\alpha}$$

$$\text{أ- حدد الشكل المثلثي للعدد } f(z) - i \quad (0.5 \text{ نقطة})$$

$$\text{ب- حدد و أرسم المجموعتين } \zeta = \{M(z) / |f(z) - i| = \sqrt{2}\}$$

$$\text{و } D = \left\{ M(z) / \arg(f(z) - i) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \right\} \quad (1 \text{ نقطة})$$

د : الحالة

صحیح الغرض الاول الاسد سن III

السنة الدراسية 2011 . 2010

تمارين (المسائل)

الحزب II
النسبة ان

$$\forall x \in]-1, +\infty[\text{ (أي } x > -1)$$

$$\frac{x}{3(x+2)} \leq \int_0^x \frac{t^2}{1+t} dt \leq \frac{x}{3}$$

اذا كان $x > 0$

لدينا $0 < t < x$

$$1 < t+1 < x+1$$

$$\frac{1}{x+1} < \frac{1}{t+1} < 1$$

$$\frac{t^2}{x+2} < \frac{t^2}{t+1} < t^2$$

$$\forall x > 0 \int_0^x \frac{t^2}{x+2} dt < \int_0^x \frac{t^2}{t+1} dt < \int_0^x t^2 dt$$

$$\frac{1}{x+2} \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^x < \int_0^x \frac{t^2}{t+1} dt < \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^x$$

$$\frac{x^3}{3(x+2)} < \int_0^x \frac{t^2}{t+1} dt < \frac{x^3}{3}$$

$$\frac{x}{3(x+2)} < \int_0^x \frac{t^2}{t+1} dt < \frac{x}{3}$$

عندما كان $x \in]-1, 0[$

لدينا $x < t < 0$

$$x+1 \leq t+1 \leq 1$$

$$1 < \frac{1}{t+1} \leq \frac{1}{x+2}$$

$$t^2 \leq \frac{t^2}{t+1} \leq \frac{t^2}{x+2}$$

$$\forall x \in]-1, 0[\quad x < 0$$

$$\int_x^0 t^2 dt \leq \int_x^0 \frac{t^2}{t+1} dt \leq \int_x^0 \frac{t^2}{x+2} dt$$

$$\left[\frac{t^3}{3} \right]_x^0 \leq \int_x^0 \frac{t^2}{t+1} dt \leq \frac{1}{x+2} \left[\frac{t^3}{3} \right]_x^0$$

جزء II

$$\frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{1+t} dt = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} + \frac{1}{2}$$

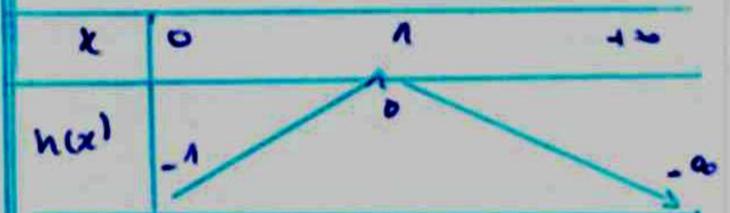
لدينا

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{1+t} dt &= \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2 - 1 + 1}{1+t} dt \\ &= \frac{1}{x^2} \int_0^x t - 1 + \frac{1}{1+t} dt \\ &= \frac{1}{x^2} \left[\frac{t^2}{2} - t \right]_0^x + \frac{1}{x^2} \left[\ln(t+1) \right]_0^x \\ &= \frac{1}{x^2} \left(\frac{x^2}{2} - x \right) + \frac{1}{x^2} \ln(x+1) \\ &= \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$x - 1 - x \ln x \leq 0 \quad \text{نسبة ان}$$

$$h(x) = x - 1 - x \ln x \quad \text{نضع الدالة}$$

$$h'(x) = 1 - \ln x - 1 = -\ln x$$



حسب جدول التغيرات

$$\forall x > 0 \quad h(x) < h(1)$$

$$h(x) < 0$$

$$x - 1 - x \ln x \leq 0$$

أي

اذن

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) - x}{x^2} = -\frac{1}{2} \quad \text{لما}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1)^2} = -\frac{1}{2} \quad \text{وبالتالي}$$

وبالتالي في حالة الاستقاف

$$f'(1) = -\frac{1}{2} \quad \text{في 1 بحيث}$$

2- المبرهن التفاضلي لـ e^x

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \cdot \frac{x}{x-1}$$

$$= 0 \quad \text{لان}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

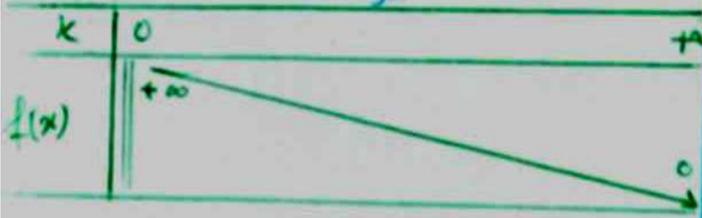
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x-1} \cdot \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x-1} = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \quad \text{لان}$$

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x-1} \right)' = \frac{\frac{1}{x}(x-1) - \ln x}{(x-1)^2} = \frac{1 - \frac{1}{x} - \ln x}{(x-1)^2} = \frac{x - 1 - \ln x - 1}{x(x-1)^2} = \frac{h(x)}{x(x-1)^2} \leq 0$$

$\forall x > 0 \quad h(x) \leq 0$ لان جدول التغير



$$\left(-\frac{x}{3} \right) \cdot \frac{1}{x^2} \leq -\frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{1+t} dt \leq \frac{-x^3}{3(x+1)} \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{x}{3(x+1)} < \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{1+t} dt \leq \frac{x}{3}$$

و عليه $\forall x \in]-1, +\infty[\setminus \{0\}$

$$\frac{x}{x+1} < \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{1+t} dt < \frac{x}{3} \quad \text{لدينا}$$

لكن الدالة f المعرفة على $]0, +\infty[$ بتالي.

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln x}{x-1} \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

ب. لتبين ان f قابلة للاستقاف في 1 و $f'(1) = -\frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x-1} \quad \text{لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1)^2}$$

نضع $x = x-1$ صبح

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) - x}{x^2}$$

و حسب ما سبق.

$$\frac{\ln(x+1) - x}{x^2} = \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{1+t} dt = \frac{1}{2}$$

لما

$$\frac{x}{3(x+1)} - \frac{1}{2} < \frac{\ln(x+1) - x}{x^2} < \frac{x}{3} - \frac{1}{2}$$

ولا حظ ان

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3(x+1)} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$x \in]0, 1[$

لدينا $x^2 < t < x$

وبما أن f تناقصية
 $f(x) < f(t) < f(x^2)$

$$\frac{\ln x}{x-1} < \frac{\ln t}{t-1} < \frac{2 \ln x}{x^2-1}$$

$\forall (x, x^2) \in]0, 1[\quad x^2 < x$

$$\frac{\ln x}{x-1} \int_x^{x^2} 1 dt < \int_x^{x^2} \frac{\ln t}{t-1} dt < \frac{2 \ln x}{x^2-1} \int_x^{x^2} 1 dt$$

$$\frac{\ln x}{x-1} (x-x^2) < -F(x) < \frac{2 \ln x}{x^2-1} (x-x^2)$$

$$\frac{2x \ln x}{x+1} < F(x) < x \ln x$$

$\forall x \in]0, +\infty[$ وعليه

$$\frac{2x \ln x}{x+1} < F(x) < x \ln x$$

ب- الاتصال وقابلية اشتقاق f

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \ln x}{x+1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 \quad \text{لان}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = 0 = F(0) \quad \text{اذن}$$

F متصلة على $]\infty, 0[$

$\forall x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

$$\frac{2 \ln x}{x+1} < \frac{F(x)}{x} < \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \ln x}{x+1} = -\infty$$

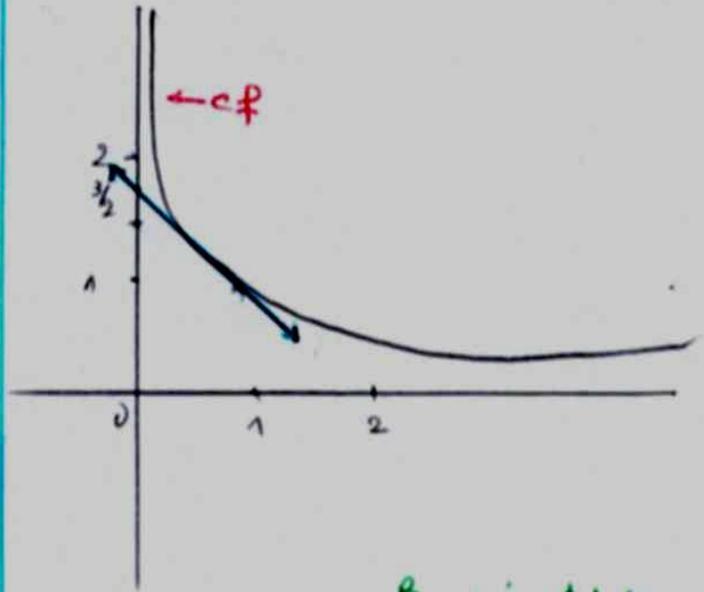
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{x} = -\infty$$

F غير متصلة للإسقاطات
 غير متصلة

4- إنشاء المصفوفة cf

لما لم نحقق عند 1 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$



الحزب ب

$$I =]0, +\infty[$$

$$F(x) = \int_x^{x^2} f(t) dt \quad x \neq 0, x \neq 1$$

$$F(0) = 0 \Rightarrow F(1) = 0$$

$$\frac{2x \ln x}{x+1} < F(x) < x \ln x \quad \text{لنسيب ان}$$

$x > 1$
 $x < t < x^2$

f و f' التناقصية

$$f(x^2) < f(t) < f(x)$$

$$\frac{2 \ln x}{x^2-1} < \frac{\ln t}{t-1} < \frac{\ln x}{x-1}$$

$\forall (x, x^2) \in]0, +\infty[\setminus \{1\} \quad x < x^2$

$$\frac{2 \ln x}{x^2-1} \int_x^{x^2} 1 dt < \int_x^{x^2} \frac{\ln t}{t-1} dt < \int_x^{x^2} 1 dt \times \frac{\ln x}{x-1}$$

$$\frac{2 \ln x}{x^2-1} (x^2-x) < F(x) < \frac{\ln x}{x-1} (x^2-x)$$

$$\frac{2x \ln x}{x+1} < F(x) < x \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x \ln x}{2+x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x+1} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x+1} = 2 \quad \text{بحسب}$$

ب - لتبين ان

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x+1) \ln x < F(x) < 2 \ln(x+1) \ln x$$

$$x < t \leq x^2 \quad \text{ليد}$$

$$\ln x \leq \ln t \leq 2 \ln x$$

$$\frac{\ln x}{t-1} \leq \frac{\ln t}{t-1} \leq \frac{2 \ln x}{t-1}$$

$$\forall (x, x^2) \in]1, +\infty[\quad x < x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_x^{x^2} \frac{1}{t+1} dt \leq \int_x^{x^2} \frac{\ln t}{t-1} dt \leq 2 \ln x \int_x^{x^2} \frac{1}{t-1} dt$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln[\ln(x+1)] \ln x < F(x) < 2 \ln x [\ln(x+1)] \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\ln\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)\right) \ln x < F(x) < 2 \ln x \left(\ln\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)\right) \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x \ln(x+1) < F(x) < 2 \ln x \ln(x+1)$$

ج - اخرج السنتيمي ر

$$\frac{\ln x \cdot \ln(x+1)}{x} < \frac{F(x)}{x} < \frac{2 \ln x \ln(x+1)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x \cdot \ln(x+1)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}$$

ليد اذا كان $x > 1$

$$\frac{2x \ln x}{x+1} \leq F(x) \leq 2x \ln x$$

$$\frac{2x \ln x}{(x^2+1)} \leq \frac{F(x)}{x-1} \leq \frac{2x \ln x}{x-1}$$

$$\frac{2x \ln x}{x^2-1} \leq \frac{F(x)-F(1)}{x-1} \leq \frac{2x \ln x}{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x \ln x}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x}{x+1} \ln x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x}{x+1} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x \ln x}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{F(x)-F(1)}{x-1} = 1 \quad \text{اذن (1)}$$

اذا كان $0 < x < 1$

$$\frac{2x \ln x}{x-1} < \frac{F(x)}{x-1} < \frac{2x \ln x}{x^2-1}$$

بالمثل

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x \ln x}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x \ln x}{x^2-1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{F(x)-F(1)}{x-1} = 1 \quad \text{اذن (2)}$$

من 1 و 2 ليدنا F قابلة

للاستيفاف على كمين 1 و 0

$$F'_d(2) = F'_g(1) = 1$$

\Leftarrow F قابلة للاستيفاف في 1

(4)

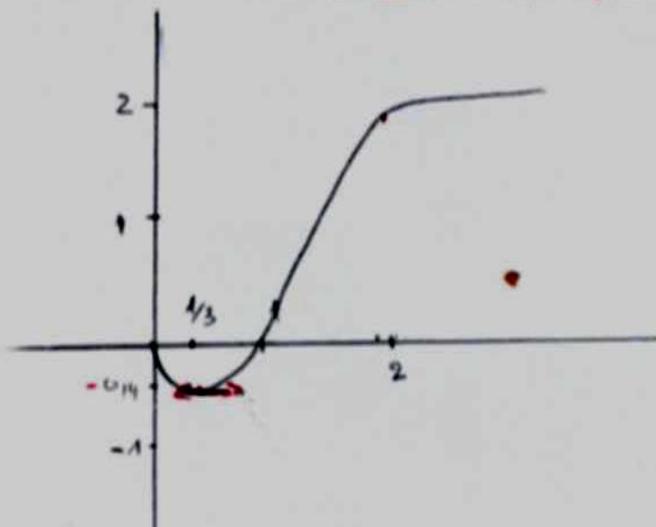
التي f قابلة للاستيفاء
على $]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2x f(x^2) - f(x) \\ &= \frac{2x \times 2 \ln(x)}{x^2 - 1} - \frac{\ln x}{x - 1} \\ &= \frac{4x \ln x - x \ln x - \ln x}{x^2 - 1} \\ &= \frac{\ln x (3x - 1)}{x^2 - 1} \end{aligned}$$

جدول تغيرات F .

x	0	$\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
$\ln x$		-	-	+
$3x - 1$	-	0	+	+
$x - 1$	-	-	0	+
$F'(x)$	-	0	+	+
$F(x)$	0			$+\infty$

المختصا.



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\ln(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x) - \ln(x+1)}{x} = 0$$

و هنا حصة ثانية

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x \ln(x+1)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \left(\frac{2 \ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{2 \ln(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$$

وعليه C_f يقبل فرعا
شكليا نحو محور الـ y فاصلي.
3. قابلية استيفاء F .

دالة f صليّة G بحيث
 $f \rightarrow \frac{f}{t-1}$ عند $t=1$ اذن يقبل

$$F(x) = G(x^2) - G(x).$$

$G(x)$ قابلة للاستيفاء
على $]0, +\infty[$.

$x \rightarrow x^2$ قابلة للاستيفاء على
 \mathbb{R}_+^* و \mathbb{R}_+^*

$G \circ u$ قابلة للاستيفاء
على \mathbb{R}_+^*

تمرين 2

$$iz = (1-2z)(z-i)$$

$$iz = z - i - 2z^2 + 2iz$$

$$0 = z + 2iz - 2z^2 - iz - i$$

وبالتالي .

$$2z^2 - iz - z + i = 0$$

$$2z^2 - z(1+i) + i = 0$$

من جهة أخرى

$$\Delta = 2i - 8i = -6i = 3(-2i) = (\sqrt{3}(1-i))^2$$

و عليه .

$$z_1 = \frac{1+i - \sqrt{3} + \sqrt{3}i}{4}$$

$$= \frac{1-\sqrt{3}}{4} + i \left(\frac{1+\sqrt{3}}{4} \right)$$

$$z_2 = \frac{1+i + \sqrt{3} - \sqrt{3}i}{4}$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}}{4} + i \left(\frac{1-\sqrt{3}}{4} \right)$$

$$S = \left\{ \left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}, i \left(\frac{1+\sqrt{3}}{4} \right) \right), \left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}, i \left(\frac{1-\sqrt{3}}{4} \right) \right) \right\}$$

$$f(z) - i = \frac{iz - iz - 1}{z - i} = \frac{-1}{z - i}$$

$$= -\frac{1}{r} e^{-i\alpha}$$

$$= \frac{e^{i(\pi - \alpha)}}{r}$$

$$M(z) \in S \Leftrightarrow |f(z) - i| = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{r} = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow |z - i| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

نضع $A(x)$

$$\Leftrightarrow AM = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

كحد الدائرة التي مركزها A و شعاعها $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$f(z) = \frac{iz}{z-i}$$

$$f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

لدينا

$$f(z) \in i\mathbb{R}$$

تقني

$$\frac{iz}{z-i} = \frac{i\bar{z}}{\bar{z}+i}$$

$$\Leftrightarrow iz(\bar{z}+i) = i\bar{z}(z-i)$$

$$\Leftrightarrow iz\bar{z} - z = i\bar{z}z + \bar{z}$$

$$\Leftrightarrow z + \bar{z} = 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$$

$$\Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$$

ب - مجموعة القيم $E = \{M(z) | f(z) \in \mathbb{R}\}$

$$f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{iz}{z-i} = \frac{-i\bar{z}}{\bar{z}+i}$$

تقني

$$\frac{iz}{z-i} = \frac{-i\bar{z}}{\bar{z}+i}$$

$$\Leftrightarrow iz(\bar{z}+i) = -i\bar{z}(z-i)$$

$$\Leftrightarrow iz\bar{z} - z = -i\bar{z}z - \bar{z}$$

$$\Leftrightarrow 2iz\bar{z} - (z - \bar{z}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2i|z|^2 - 2i\operatorname{Im}(z) = 0$$

$$z = x + iy$$

نضع

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - y = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

اذن E هي الدائرة التي مركزها

$$O \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

محور متعامد $A(0, 1)$ و شعاعها $r = \frac{1}{2}$

ج - حل المعادلة $f(z) = 1 - 2z$

$$f(z) = 1 - 2z$$

$$\frac{iz}{z-i} = 1 - 2z$$

تقني

