الثانية علوم رياضية	فرض رقم 1	2014-2013

التمرين (1) ليكن n عددا من $\mathbb{N}$

1) بين أن : $\forall x\in\mathbb{R} \quad : \quad \sin^{2n+1} x=\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k (-1)^k \sin x \cos^{2k} x$

2) أحسب $I_k=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \sin t \cos^{2k} t \ dt \quad (\forall k\in\mathbb{N})$

3) استنتج التكامل : $I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \sin^{2n+1} t \ dt$

التمرين (2) ليكن n عدد طبيعي غير منعدم نضع $U_n=\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}dx$ و $U_0=\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$

1) أحسب U_0

2) بين أن $U_{n+1}+U_n=\frac{1}{2n+1} \quad (\forall n\in\mathbb{N})$ و استنتج قيمة كل من U_1 و U_2

3) بين أن $0<U_n<\frac{1}{2n+1} \quad (\forall n\in\mathbb{N}^*)$ ثم حدد $\lim_{n\to+\infty} U_n$

4) نعتبر المتتالية $(V_n)_n$ المعرفة بما يلي : $V_n=\sum_{k=0}^{k=n}\frac{(-1)^k}{2k+1}$

أ- بين أن $\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k x^{2k}=\frac{1+(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2} \quad (\forall n\in\mathbb{N})$

ب- استنتج أن المتتالية $(V_n)_n$ متقاربة و أن $\lim_{n\to+\infty} V_n=\frac{\pi}{4}$

التمرين (3) (I) نعتبر الدالة العددية f بحيث : $f(x)=\frac{e^x}{1+x^2}$

1) أ- أحسب النهايتين $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

ب- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

2) أحسب $f'(x)$ و أدرس منحى تعيرات الدالة f

3) أرسم المنحنى (C_f)

(II) لتكن F الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $F(x)=\int_0^x f(t)dt$

1) أ- بين أن $f(t)\geq\frac{e^t}{1+x^2} \quad (\forall x>0)(\forall t\in[0,x])$

ب- استنتج أن $F(x)\geq f(x)-\frac{1}{1+x^2} \quad (\forall x>0)$ ثم أحسب $\lim_{x\to+\infty} F(x)$

ج- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (Γ_F) عند $+\infty$

2) بين أن F تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

3) أ- بين أن $F(x)\geq\arctan x \quad (\forall x<0)$

ب- نقبل أن F تقبل نهاية l عند $-\infty$. بين أن $-\frac{\pi}{2}\leq l\leq 0$

تصحيح الفرض المحروس رقم 1
الدورة II

التمرين II: ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$.

① نبين أن:

$$(\forall x\in\mathbb{R}):\quad \sin^{2n+1}x=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^k\sin x\cos^{2k}x$$

لدينا:

$$\sin^{2n+1}x=\sin x\,(\sin^2 x)^n$$
$$=\sin x\,(1-\cos^2x)^n$$
$$=\sin x\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-\cos^2x)^k$$
$$=\sin x\sum_{0}^{n}C_n^k(-1)^k\cdot\cos^{2k}x$$

وبالتالي:

$$(\forall x\in\mathbb{R}):\quad \boxed{\sin^{2n+1}x=\sum_{0}^{n}C_n^k(-1)^k\sin x\cos^{2k}x}$$

② حساب التكامل I_k لكل k من $\mathbb{N}$:

لدينا:

$$I_k=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\sin t\cos^{2k}t\,dt$$
$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}-\cos' t\cdot\cos^{2k}t\,dt$$
$$=\left[-\frac{\cos^{2k+1}t}{2k+1}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{x}$$
$$=\frac{-\cos^{2k+1}x}{2k+1}$$

وعليه فإن:

$$(\forall k\in\mathbb{N}):\quad \boxed{I_k=\frac{-\cos^{2k+1}x}{2k+1}}$$

(3) استنتاج التكامل المقترح:

لدينا:

$$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\sin^{2n+1}t\,dt$$

وحسب السؤال السابق (1) فإن:

$$(\forall t\in\mathbb{R});\quad \sin^{2n+1}t=\sum_{0}^{n}C_n^k(-1)^k\sin x.\cos^{2k}x$$

وبالتالي:

$$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\sin^{2n+1}t\,dt=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^k\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\sin t\cos^{2k}t\,dt$$

وحسب السؤال (2) نجد أن:

$$I=\sum_{0}^{n}C_n^k(-1)^k\cdot\frac{-\cos^{2k+1}x}{2k+1}$$

إذن:

$$\boxed{I=-\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k(-1)^k}{2k+1}\cdot\cos^{2k+1}x}$$

التمرين III:

ليكن n من $\mathbb{N}^*$. ونضع:

$$\begin{cases} u_0=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx\\[2mm] u_n=\displaystyle\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx\end{cases}$$

① حساب u_0:

لدينا:

$$u_0=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx$$
$$=\int_0^1(\operatorname{Arctg}x)'\,dx$$
$$=[\operatorname{Arctg}x]_0^1$$

$$\boxed{u_0=\frac{\pi}{4}}$$

② نبين أن:

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*);\quad u_{n+1}+u_n=\frac{1}{2n+1}$$

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}^*$.

لدينا:

$$u_{n+1}+u_n=\int_0^1\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,dx+\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx$$
$$=\int_0^1\frac{x^{2n+2}+x^{2n}}{1+x^2}\,dx$$
$$=\int_0^1\frac{x^{2n}(1+x^2)}{(1+x^2)}\,dx$$
$$=\int_0^1x^{2n}\,dx$$
$$=\left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1$$

وبالتالي:

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*);\quad \boxed{u_{n+1}+u_n=\frac{1}{2n+1}}$$

قيمة u_1:

حسب النتيجة السابقة: $u_1+u_0=\frac{1}{2\times0+1}$

أي أن: $u_1=\frac{1}{1}-u_0$

إذن: $\boxed{u_1=1-\frac{\pi}{4}}$

و $u_2+u_1=\frac{1}{2\times1+1}$

بمعنى أن: $u_2=\frac{1}{3}-u_1$

$=\frac{1}{3}-1+\frac{\pi}{4}$

وبالتالي: $\boxed{u_2=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}}$

3) نبين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$: $0<u_n<\frac{1}{2n+1}$

$(\forall x\in]0,1])$ $1+x>1$

و $x^{2n}>0$

$\Leftarrow$ $\frac{x^{2n}}{1+x^2}>0$

أي: $\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x^2}dx>0$

وعليه $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; ① $u_n>0$

ومنه نستنتج أن: $u_{n+1}>0$

أي: $u_n+u_{n+1}>u_n$

وعليه: $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; ② $u_n<\frac{1}{2n+1}$

من العلاقتين ① و ② يكون

لدينا: $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $\boxed{0<u_n<\frac{1}{2n+1}}$

وبما أن: $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+1}=0$

فإن: $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$

4) لتكن المتتالية $(V_n)_n$ بحيث:

$$V_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

أ- نبين أن:

$$(\forall n\in\mathbb{N}) : \sum_{k=0}^{n}(-1)^kx^{2k}=\frac{1+(-1)^nx^{2n+2}}{1+x^2}$$

لدينا:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^kx^{2k}=1-x^2+x^{4}+\dots+(-1)^n x^{2n}$$

$$=\frac{1+(-1)^nx^{2n+2}}{1-(-x^2)}$$

$$\boxed{\sum_{0}^{n}(-1)^kx^{2k}=\frac{1+(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2}}\ ; n\in\mathbb{N}$$

ب- تقارب المتتالية $(V_n)_n$ ونهايتها:

لدينا:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^kx^{2k}=\frac{1+(-1)^nx^{2n+2}}{1+x^2}$$

ومنه:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1x^{2k}dx=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}+\int_0^1(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}dx$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}=u_0+(-1)^n u_{n+1}$$

مع العلم أن: $\int_0^1x^{2k}dx=\left[\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right]_0^1=\frac{1}{2k+1}$

وعليه: $V_n=u_0+(-1)^nu_{n+1}$

$=\frac{\pi}{4}+(-1)^nu_{n+1}$

وحيث أن: $\forall n\in\mathbb{N}$ $0<u_{n+1}<\frac{1}{2n+3}$

فإن: $\lim_{n\to+\infty}u_{n+1}=0$

وعليه فإن $(V_n)_n$ متقاربة و:

$$\lim_{n\to+\infty}V_n=\frac{\pi}{4}$$

التمرين III :

(I) لتكن f الدالة بحيث:

$$f(x)=\frac{e^x}{1+x^2}$$

1) أ- حساب النهايات المطلوبة:

لدينا $\lim_{+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1+x^2}$

$$=\lim_{+\infty}\frac{\frac{e^x}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+1}$$

$$=+\infty$$

[لأن $\lim_{+\infty}\frac{e^x}{x^2}=+\infty$]

ولدينا $\lim_{-\infty}\frac{e^x}{1+x^2}=0$

[لأن $\lim_{-\infty}e^x=0$ و $\lim_{-\infty}1+x^2=+\infty$]

ب- الفرع اللانهائي لـ $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $+\infty$:

لدينا $\lim_{+\infty}f(x)=+\infty$

ولدينا $\lim_{+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{+\infty}\frac{e^x}{(x^2+1)x}$

يعني $=\lim_{+\infty}\frac{e^x}{x^3+x}$

إذن $=\lim_{+\infty}\frac{e^x/x^3}{1+\frac{1}{x^2}}$

ومنه $=+\infty$

[لأن $\lim_{+\infty}\frac{e^x}{x^3}=+\infty$]

إذن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل محور الأراتيب كاتجاه مقارب بجوار $+\infty$.

2- حساب $f'(x)$ ودراسة تغيرات الدالة f:

الدالة f قابلة للاشتقاق على ℝ.

و $(\forall x\in\mathbb{R})$: $f'(x)=\frac{(1+x^2)e^x-2xe^x}{(1+x^2)^2}$

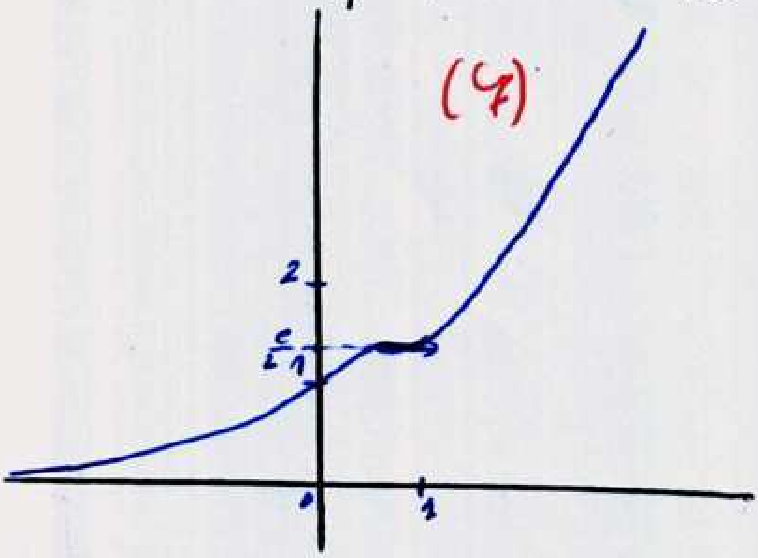
$$=\frac{e^x+x^2e^x-2xe^x}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{e^x(1+x^2-2x)}{(1+x^2)^2}$$

$$=\frac{(x-1)^2 e^x}{(1+x^2)^2}\geq 0$$

إذن f تزايدية قطعا على ℝ.

3) منحنى الدالة f:



(II) نعتبر الدالة F للمتغير الحقيقي x بحيث:

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

1) أ- نبين أن: $(\forall x>0)(\forall t\in[0,x])$; $f(t)\geq\frac{e^t}{1+x^2}$

$(\forall t\in[0,x])$; $1+t^2\leq 1+x^2$

أي أن $\frac{1}{1+t^2}\geq\frac{1}{1+x^2}$

ومنه $\frac{e^t}{1+t^2}\geq\frac{e^t}{1+x^2}$

وعليه $\begin{pmatrix}\forall t\in[0,x]\\ \forall x>0\end{pmatrix}$; $\boxed{f(t)\geq\frac{e^t}{1+x^2}}$

ب- نستنتج أن:

$(\forall x>0)$: $F(x)\geq f(x)-\frac{1}{1+x^2}$

حسب الجزء (أ) من السؤال (1) لدينا

$\begin{cases}\forall x>0\\ \forall t\in[0,x]\end{cases}$: $f(t)\geq\frac{e^t}{1+x^2}$

ومنه $(x>0)$ // $\int_0^x f(t)\,dt\geq\int_0^x\frac{e^t}{1+x^2}\,dt$

فيعني أن $F(x) \geq \frac{1}{1+x^2}\cdot[e^t]_0^x$

$$F(x) \geq \frac{e^x}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}$$

وعليه: $(\forall x>0)$ $\boxed{F(x) \geq f(x) - \frac{1}{1+x^2}}$

وبما أن: $\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$

و: $\lim_{+\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$

فإن: $\boxed{\lim_{+\infty} F(x) = +\infty}$

2- الفرع اللانهائي للمنحنى (Γ) عند $+\infty$:

لدينا: $\forall x>0:\ F(x) \geq f(x) - \frac{1}{1+x^2}$

ومنه: $\frac{F(x)}{x} \geq \frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x+x^3}$

وبما أن: $\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

و: $\lim_{+\infty} \frac{1}{x^3+x} = 0$

فإن: $\lim_{+\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty$

وهذا يعني أن (Γ) له فرع شلجمي باتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$.

3) رتابة الدالة F:

لدينا $t \mapsto f(t)$ متصلة على $\mathbb{R}$.

إذن فهي تقبل دالة أصلية Φ معرفة على $\mathbb{R}$.

$\Leftarrow$ $F(x) = \Phi(x) - \Phi(0)$

وبما أن $\Phi(x)$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

فإن F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

و: $(\forall x\in\mathbb{R})$ $F'(x) = \Phi'(x) = f(x) > 0$

ومنه F تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

3) أ- نثبت أن: $F(x) \geq \text{Arctg}\, x$ $(\forall x \leq 0)$

نعتبر من أجل ذلك الدالة φ المعرفة كما يلي:

$(\forall x\in]-\infty,0]):\ \varphi(x) = F(x) - \text{Arctg}\, x$

لدينا φ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^-$.

و: $(\forall x\in\mathbb{R}^-):\ \varphi'(x) = F'(x) - \text{Arctg}'(x)$

$$= f(x) - \frac{1}{1+x^2}$$

يعني أن

إذن: $(\forall x\leq 0)$ $\varphi'(x) = \frac{e^x-1}{1+x^2}$

وبما أن: $x \leq 0$ أي $e^x \leq 1$

فإن $\varphi'(x) \leq 0$. وهذا يعني أن φ تناقصية قطعا على $]-\infty,0]$.

ومنه

$(\forall x\leq 0) \Rightarrow \varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$

$$F(x) - \text{Arctg}\, x \geq 0$$

$(\forall x\leq 0)$ $\boxed{F(x) \geq \text{Arctg}\, x}$

ب- نقبل أن F لها نهاية ℓ عند $-\infty$: نبين أن $-\frac{\pi}{2} \leq \ell \leq 0$

لدينا: $(\forall x\in\mathbb{R}):\ f(x) > 0$

$\Leftarrow$ $(x\leq 0);\ \int_0^x f(t)\,dt \leq 0$

أي: $\boxed{F(x) \leq 0}$

إذن: $(\forall x\leq 0):\ \text{Arctg}\, x \leq F(x) \leq 0$

وعليه: $\lim_{-\infty} \text{Arctg}\, x \leq \lim_{-\infty} F(x) \leq 0$

أي أن: $\lim_{-\infty} \text{Arctg}\, x \leq \ell \leq 0$

وبما أن: $\lim_{-\infty} \text{Arctg}\, x = -\frac{\pi}{2}$

[لأن $x \to -\infty$]

فإن: $\boxed{-\frac{\pi}{2} \leq \ell \leq 0}$

وهذا هو المطلوب.

من اقتراح الأستاذ
حسني الإدريسي