

التمرين الأول

ليكن m عددا عقدي غير منعدم . نعتبر في \mathbb{C} المعادلة :

$$(E) \quad m^2 Z^2 + m^3 Z + 1 - im^2 = 0$$

1) أ- حل المعادلة (E) من أجل $m = -1$

ب- حدد قيم m التي يكون من أجلها $u = 1+i$ حلا للمعادلة (E) ثم حدد الحل الآخر في كل حالة

2) أ- تحقق أن مميز المعادلة (E) يكتب $\Delta = m^2(m^2 + 2i)^2$

ب- حدد Z_1, Z_2 حلي المعادلة (E)

3) المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر (O, \vec{u}, \vec{v}) .

نعتبر في (P) النقط A, B, M التي أحاطتها على التوالي هي :

$$Z = \frac{m-a}{m-b} \quad \text{ونضع} \quad m, \quad b = \frac{i}{m}, \quad a = -m - \frac{i}{m}$$

أ- بين أن $(\bar{Z} = Z) \Leftrightarrow \left(\arg(m) \equiv \frac{\pi}{4} [\pi] \text{ أو } \arg(m) \equiv -\frac{\pi}{4} [\pi] \right)$

ب- استنتج (Γ) مجموعة النقط $M(m)$ بحيث يكون A, B, M نقط مستقيمة

4) ليكن R الدوران الذي مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{2}$. نضع $A' = R(A)$ ،

$$M' = R(M) \quad \text{و} \quad B' = R^{-1}(M)$$

أ- حدد a' لحق النقطة A' وبين أن لحق B' هو العدد $b' = -im + \frac{i-1}{m}$

ب- حدد m' لحق النقطة M' وبين أن B منتصف القطعة $[B'M']$

ج- ليكن I منتصف القطعة $[AM]$ و Z_I لحقها .

أحسب $\frac{b'-a'}{b-Z_I}$ و استنتج أن $(A'B') \perp (BI)$ و أن $A'B' = 2BI$

التمرين الثاني

ليكن a, b عددين من \mathbb{Z}^* أوليين فيما بينهما . نضع $N = a^4 + b^4$

1) بين أن $[16] \equiv n^4$ أو $[16] \equiv 1$ لكل عدد n من \mathbb{Z}

2) استنتج أن $[16] \equiv 1$ أو $[16] \equiv 2$

3) ليكن p عددا طبيعيا أوليا أكبر أو يساوي 3 و قاسما للعدد N

أ- بين أن $p \wedge a = 1$ و $p \wedge b = 1$

ب- بين أن : $[p] \equiv -1$ $(\exists c \in \mathbb{Z}) ac \equiv -1$ و استنتج أن $[p] \equiv -1$ $(\exists x \in \mathbb{Z}) x^4 \equiv -1$

ج- ليكن r باقي القسمة الأقليدية للعدد p على 8 .

(i) بين أن $[p] \equiv 1$ (ii) بين أن $r = 1$

التمرين الثالث

ليكن n عددا من \mathbb{N}^* و نعتبر الدالة f_n المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي :

$$f_n(x) = \frac{1}{x} - (\ln x)^{2n+1} \quad \text{و} \quad (C_n) \text{ هو المنحنى الممثل للدالة } f_n \text{ في } (O, \vec{i}, \vec{j})$$

(I) 1) أ- بين أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^3 = 0$ و أحسب النهاية $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_1(x)$

ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x)$

2) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x} = 0$ و أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_1) عند $+\infty$

3) احسب المشتقة $f_1'(x)$ ثم أنجز جدول تغيرات الدالة f_1

4) بين أن المعادلة $f_1(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β_1 و أن $\beta_1 \in]2, e[$

5) أرسم المنحنى (C_1) (نأخذ $\beta_1 = 2,2$)

(II) 1) أحسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$

2) بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل في المجال $[1, e]$ حلا وحيدا نرمز له بالرمز β_n

3) أ- أدرس على المجال $[1, e]$ إشارة الفرق $f_{n+1}(x) - f_n(x)$

ب- بين أن المتتالية $(\beta_n)_{n \geq 1}$ تزايدية

4) أ- بين أن $\frac{-1}{2n} \leq \ln(\ln \beta_n)$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

ب- استنتج أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = e$

تجميع الفصول المحرور رقم 2

الاشهاد II

التعريف I :

(E): $m^2 Z^2 + m^3 Z + 2 - im^2 = 0$

④ - أ. متباين $m = -1$

(E): $Z^2 - Z + 2 - i = 0$

$\Delta = 1 - 4(1-i) = -3 + 4i$

$\Delta = (2i+1)^2$

ليكن z_1 و z_2 حلتي المعادلة (E)

$z_1 = \frac{1 - (2i+1)}{2} = -i$

$z_2 = \frac{1 + (2i+1)}{2} = 1+i$

ومنه:

$S = \{-i, 1+i\}$

ب. لنحدد تغيير m التي يكون لها أجلها

$m = 1+i$ حل للمعادلة (E)

(E) $\Leftrightarrow (1+i)m^3 + im^2 + 2 = 0$

لدينا: $m = -1$ حل للمعادلة (E')

ومنه:

(E') $\Leftrightarrow (m+1)((1+i)m^2 - m + 2) = 0$

لنحل المعادلة:

$(1+i)m^2 - m + 2 = 0$

$\Delta = -3 - 4i = (2i-1)^2$

ومنه:

$m = \frac{1 - (2i-1)}{2(1+i)} = -i$

$m = \frac{1 + (2i-1)}{2(1+i)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

وعليه تغيير m التي لها أجلها $m = 1+i$

حل للمعادلة (E) هي:

$m \in \{-1, -i, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\}$

في حالة $m = -1$ u و v حل للمعادلة (E)

$u = 1+i$

$v = -i$

في حالة $m = -i$

(E) $\Leftrightarrow -Z^2 + iZ + 1+i = 0$

$u_1 = -i, u_2 = -1$

ومنه:

$u = 1+i$

و

$u = -1$

فه حالة $m = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

(E) $\Leftrightarrow \frac{1}{2}iZ^2 + \frac{1}{4}(1+i)Z + \frac{3}{2} = 0$

$\Delta = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 2i = -\frac{3}{4}(1+i)$

وعليه:

$u = 1+i$

$v = -\frac{3}{4}(1+i)$

④ - أ. لنستحقق أن معيّن المعادلة (E) يكتب مع الشكل:

$\Delta = m^2(m^2 + 2i)$

$\Delta = m^6 - 4(1-im^2)m^2$

$\Delta = m^2(m^4 - 4 + 4im^2)$

$\Delta = m^2(m^2 + 2i)^2$

ومنه:

ب. لدينا z_1 و z_2 حلتي المعادلة (E)

$z_1 = \frac{-m^3 - m(m^2 + 2i)}{2m^2} = -m - \frac{i}{m}$

$z_2 = \frac{-m^3 + m(m^2 + 2i)}{2m^2} = \frac{i}{m}$

④ - $Z = \frac{m-a}{m-b} = \frac{m+m+\frac{i}{m}}{m-\frac{i}{m}} = \frac{2m^2+i}{m^2-i}$

$= \frac{2(m^2-i)+3i}{m^2-i} = 2 + \frac{3i}{m^2-i}$

$Z = \bar{Z} \Leftrightarrow 2 + \frac{3i}{m^2-i} = 2 - \frac{3i}{m^2+i}$

$\Leftrightarrow \bar{m}^2 = -m^2$

$\Leftrightarrow 2 \operatorname{Re}(m^2) = 0$

ومنه: $m^2 \in i\mathbb{R}$

$\arg(m^2) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ أو } \arg(m^2) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$

$\arg(m) = \frac{\pi}{4} [2\pi] \text{ أو } \arg(m) = -\frac{\pi}{4} [2\pi]$

وعليه:

$\arg(m) = \frac{\pi}{4} [2\pi] \text{ أو } \arg(m) = -\frac{\pi}{4} [2\pi]$

ب.

$\left(\begin{matrix} M, B \text{ و } A \\ \text{نقطة مستقيمة} \end{matrix} \right) \Leftrightarrow \frac{m-a}{m-b} \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow Z \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow Z = \bar{Z}$

$\Leftrightarrow \arg(m) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \text{ أو } \arg(m) \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]$

$\Leftrightarrow \operatorname{Re}(m) = \operatorname{Im}(m) \text{ أو } \operatorname{Re}(m) = -\operatorname{Im}(m)$

ولدينا : $\left| \frac{b'-a'}{b-z_I} \right| = |2i| = 2$
 ومنه ، $|b'-a'| = 2|b-z_I|$
 أي : $A'B' = 2BI$

$A'B' = 2BI$

التمرين II

1. إذا كان n زوجي $(n \in \mathbb{Z}) / n = 2k \Rightarrow n^4 = 16k^4$

(1) $n^4 \equiv 0 [16]$
 إذا كان n فردي

(3) $n \in \mathbb{Z} / n = 2k+1 \Rightarrow n^4 = (2k+1)^2(2k+1)^2$
 $\Rightarrow n^4 = (4k^2+4k+1)^2$
 $\Rightarrow n^4 = 16k^4 + 8k^2(4k+1) + (1+4k)^2$

$\Rightarrow n^4 = 16k^4 + 8k^2 + 32k^3 + 1 + 16k^2 + 8k$
 $\Rightarrow n^4 \equiv 16(k^4 + k^2 + 2k^3) + 8k(k+1) + 1$

ولدينا : $\begin{cases} 16(k^4 + k^2 + 2k^3) \equiv 0 [16] \\ 8k(k+1) \equiv 0 [16] \end{cases}$
 حيث $8k(k+1) = 2 \cdot 4k(k+1) = 2 \cdot 29(3963)$

(2) $n^4 \equiv 1 [16]$

من (1) و (2) نستنتج أن : $n^4 \equiv 0 [16]$ أو $n^4 \equiv 1 [16]$

الحالة (1) : $a^4 + b^4 = 1$
 $\begin{cases} a^4 \equiv 1 [16] \\ b^4 \equiv 0 [16] \end{cases}$ أو $\begin{cases} a^4 \equiv 0 [16] \\ b^4 \equiv 1 [16] \end{cases}$

$a^4 + b^4 \equiv 1 [16]$
 $N \equiv 1 [16]$

الحالة (2) : $\begin{cases} a^4 \equiv 1 [16] \\ b^4 \equiv 1 [16] \end{cases}$
 $a^4 + b^4 \equiv 2 [16]$

$N \equiv 2 [16]$

نستنتج أن : $N \equiv 1 [16]$ أو $N \equiv 2 [16]$

نقطة $(x, y) \in \mathbb{R}$ $m = x + yi$ (m)
 مجموعة النقاط $M(m)$ تكون دوائر
 A و B و C مستقيمة في اتحاد
 المستقيمة : $(D_1) : y = x$
 $(D_2) : y = -x$

(4) -1

لدينا R دوران مركزه $B(\frac{i}{m})$ وزاوية $\frac{\pi}{2}$
 $A' = R(A) \Leftrightarrow a' = e^{i\frac{\pi}{2}}(a - \frac{i}{m}) + \frac{i}{m}$

$\Leftrightarrow a' = ai + \frac{1}{m} + \frac{i}{m}$
 $\Leftrightarrow a' = -im + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \frac{i}{m}$
 $\Leftrightarrow a' = -im + \frac{2}{m} + \frac{i}{m}$

$B' = R^{-1}(B) \Leftrightarrow R(B') = M$
 $\Leftrightarrow e^{i\frac{\pi}{2}}(b' - \frac{i}{m}) + \frac{i}{m} = m$
 $\Leftrightarrow b' - \frac{i}{m} = -im - \frac{1}{m}$
 $\Leftrightarrow b' = -im + \frac{i-1}{m}$

$M' = R(M) \Leftrightarrow m' - \frac{i}{m} = e^{i\frac{\pi}{2}}(m - \frac{i}{m})$
 $\Leftrightarrow m' = mi + \frac{i+1}{m}$

لدينا : $\frac{b'+m'}{2} = \frac{-mi + \frac{i-1}{m} + mi + \frac{i+1}{m}}{2}$
 $= \frac{2i}{2m} = \frac{i}{m}$

ولدينا : $P(b)$ في منتصف القطعة $[0, m]$
 ج. ليكن I منتصف القطعة $[AM]$ و Z_I نقطة

$Z_I = \frac{m+a}{2} = \frac{-i}{2m}$
 $\frac{b'-a'}{b-z_I} = \frac{-im + \frac{i-1}{m} + im - \frac{1}{m} - \frac{i}{m}}{\frac{i}{m} + \frac{1}{2m}}$

$= \frac{-3}{m} \times \frac{2m}{3i}$

$= 2i$
 $(\vec{IA}, \vec{A'B'}) \equiv \arg\left(\frac{b'-a'}{b-z_I}\right) [2\pi]$
 $= \arg(2i) [2\pi]$
 $= \frac{\pi}{2} [2\pi]$

(IB) \perp (A'B')

ج. لیکن P عدد اولیہ وقتہ : حسب جبرہند -
 فرضاً $x^p \equiv x [P] \Rightarrow x(x^{p-1} - 1) \equiv 0 [P]$
 نعترفہ ان $x \equiv 0 [P]$
 $x \equiv 0 [P] \Rightarrow x^4 \equiv 0 [P]$
 وولینا، $x^4 \equiv -1 [P]$ غیر صحیح
 لہذا $x \equiv 1 [P]$ یقتصر x وعلیہ

$x^{p-1} \equiv 1 [P]$

$\exists! (q, r) \in \mathbb{Z}^2 / p = 3q + 2r$
 $x^4 \equiv -1 [P] \Rightarrow x^3 \equiv 1 [P]$
 $\Rightarrow x^{3q+r-1} \equiv x^{r-2} [P]$
 $\Rightarrow x^{p-1} \equiv x^{r-2} [P]$
 وابتالیہ

$x^{r-1} \equiv 1 [P]$

ولینا ان $r=2$ (بانیو تقسیمه الاقلدیہ للعدد P مع 8)
 $0 < r < 4$

$r=0 \Leftrightarrow p=3q$ و P اولیہ اذن $r \neq 0$
 $r \in \{1, 2, 3\}$ لان P عدد اولیہ اذن r فردی وعلیہ $r=1$

$x^2 \equiv 1 [P] \Rightarrow x^4 \equiv 1 [P] \Leftrightarrow r=3$
 ولینا، $x^4 \equiv 1 [P]$ وولینا
 $r \neq 3$

$x^4 \equiv 1 [P] \Leftrightarrow x^4 \equiv -1 [P] \Leftrightarrow r=5$
 $r \neq 5$ وولینا

$x^6 \equiv 1 [P] \Leftrightarrow x^4 \equiv -1 [P] \Leftrightarrow r=7$

$x^6 \equiv 1 [P] \Leftrightarrow x^6 \equiv -x^2 [P]$

$x^2 \equiv -1 [P] \Rightarrow x^4 \equiv 1 [P] \Leftrightarrow x^4 \equiv -1 [P]$
 $r \neq 7$ وعلیہ

$1 \equiv 1 [P] \Leftrightarrow r=1$

$r=1$

3. ا. نفع : $P = pna$

$\begin{cases} D/P \\ D/a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D/N \\ D/a^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D/a^4 + b^4 \\ D/a^4 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} D/b^4 \\ D/a^4 \end{cases}$

$\Rightarrow D/a^4 \wedge b^4$

$a^4 \wedge b^4 = 1$ وعلیہ

$D/2$ لان وعلیہ

$D=2$

$pna=2$ نفع $d=pnb$

$\begin{cases} d/P \\ d/b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/N \\ d/a^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/a^4 + b^4 \\ d/b^4 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} d/b^4 \end{cases}$

$\Rightarrow d/a^4 \wedge b^4$ و $a^4 \wedge b^4 = 1$

$\Rightarrow d/2$

$d=2$ وعلیہ

$pnb=1$ ولینا

دعوت $pna=2$ ولینا

$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2 / \alpha a + \beta p = 1$

$(-\alpha)a - \beta p = -1$

$-\alpha = c$ نفع وولینا

$\exists c \in \mathbb{Z} \quad ca \equiv -1 [P]$

$P/N \Rightarrow N \equiv 0 [P]$ ولینا

$\Rightarrow a^4 \equiv b^4 [P]$ ولینا

$ac \equiv 1 [P] \Rightarrow (ac)^4 \equiv 1 [P]$

$(ac)^4 \equiv -(bc)^4 [P]$

$(bc)^4 \equiv 1 [P]$ وعلیہ

$(bc)^4 \equiv -1 [P]$ وولینا

$bc \equiv x$ نفع

$\exists x \in \mathbb{Z} \quad x^4 \equiv -1 [P]$

لدينا $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_1(n)}{n} = 0$ وسنرى

الهدف: (b_2) يقبل فرعا متناهيًا إيجابيًا محدودًا

الأفكار الجيدة

(3) f_1 قابلة للاختزال مع \mathbb{R}^{++}

$$f_1'(x) = \frac{-1}{x^2} - \frac{3(\ln x)^2}{x}$$

$$= -\left(\frac{1}{x^2} + \frac{3(\ln x)^2}{x}\right) < 0 \quad (x \in \mathbb{R}^{++})$$

معنى f_1 تناقصي فقط مع \mathbb{R}^{++}



(4) f_1 متناقص - متناقص فقط مع \mathbb{R}^{++}

معنى f_1 تناقصي مع \mathbb{R}^{++} جزئيًا
 $\exists \epsilon \in \mathbb{R}^+$ إذن إذا $f_1(x) = 0$ تقبل

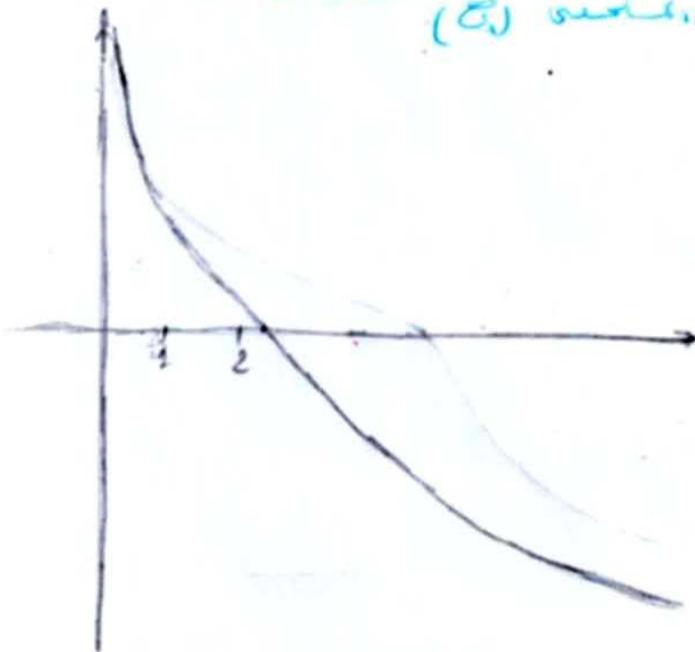
$$f_1(x) = \frac{1}{2} - (\ln(x))^2 > 0$$

$$f_1(e) = \frac{1}{2} - 1 < 0$$

$$f_1(e) < f_1\left(\frac{1}{e}\right) < f_1(2)$$

$$2 < \frac{1}{e} < e$$

الهدف (5) التناقص



$$f_1(n) = \frac{1}{n} - (\ln n)^{2n+2}$$

التمرين III

1- $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(\ln n)^3 = 0$ لتبين أن

نضع $x = X^3$ وسنرى $X = x^{1/3}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n(\ln n)^3 = \lim_{X \rightarrow +\infty} X^3 (\ln(X^3))^3$$

$$= \lim_{X \rightarrow +\infty} (3X \ln(X))^3$$

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} X \ln(X) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n(\ln n)^3 = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_2(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} - (\ln n)^3\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} (1 - n(\ln n)^3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} n(\ln n)^3 = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - n(\ln n)^3 = 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \end{array} \right.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_2(n) = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_1(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} - (\ln n)^3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} - (\ln n)^3 = -\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln n)^3 = +\infty \end{array} \right.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_1(n) = -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln n)^3}{n} = 0$$

لتبين أن: نضع $X = n^{1/3}$ وسنرى

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln n)^3}{n} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(X^3))^3}{X^3}$$

$$= \lim_{X \rightarrow +\infty} \left(\frac{3 \ln(X)}{X}\right)^3$$

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{f(X)}{X} = 0 \Rightarrow \lim_{X \rightarrow +\infty} \left(\frac{3 \ln(X)}{X}\right)^3 = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln n)^3}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f_1(n)}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{(\ln n)^3}{n}$$

$f_n(p_n) > 0$ 3 $f_{n+2}(p_{n+2}) = 0$
 $f_n(p_n) > f_{n+2}(p_{n+2})$
 $(p_n, p_{n+2}) \in (1, e)$ مع f_n تزايدية
 $p_n < p_{n+2}$
 $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تزايدية متناهية

$f_n(p_n) = 0 \Rightarrow \frac{1}{p_n} = (p_n)^{2n+2}$
 $\Rightarrow \left(\frac{1}{p_n}\right)^{\frac{1}{2n+2}} = p_n$
 $\Rightarrow \ln\left(\ln\left(\frac{1}{p_n}\right)\right) = \frac{1}{2n+2} \ln\left(\frac{1}{p_n}\right)$

$p_n < e \Rightarrow \frac{1}{p_n} > \frac{1}{e}$
 $\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{p_n}\right) > \ln(e^{-1})$
 $\Rightarrow \frac{1}{2n+2} \ln\left(\frac{1}{p_n}\right) > -\frac{1}{2n+2}$
 $\Rightarrow \ln\left(\ln\left(\frac{1}{p_n}\right)\right) > \frac{1}{2n+2}$
 $\frac{1}{2n+2} > \frac{1}{2n}$

$\ln\left(\ln\left(\frac{1}{p_n}\right)\right) > \frac{1}{2n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

$\ln\left(\ln\left(\frac{1}{p_n}\right)\right) > \frac{1}{2n} \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{p_n}\right) > e^{-\frac{1}{2n}}$

$p_n < e \Rightarrow p_n < 2$
 $e^{-\frac{1}{2n}} < \frac{1}{2} \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{p_n}\right) < \frac{1}{2}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{2n}} = e^0 = 1$
 (0.6 x e = e)

$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(p_n) = 1$

$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = e$

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} - (f_n(x))^{2n+2}\right)$

$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x))^{2n+2} = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \end{cases}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = -\infty$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x} - (f_n(x))^{2n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x} (1 - x(f_n(x))^{2n+2})$
 $x = X \quad \text{حيث } X = x^{\frac{1}{2n+2}}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{2n+2}} (1 - (x \ln(x^{2n+2}))^{2n+2})$
 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{2n+2}} (1 - (2n+2) x \ln(x))^{2n+2}$

$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{2n+2}} = +\infty \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = +\infty$

$f_n'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{(2n+2)(f_n(x))^{2n}}{x}$
 $= -\left(\frac{1}{x^2} + \frac{(2n+2)(f_n(x))^{2n}}{x}\right) < 0$

$f_n(1) = 1 > 0$
 $f_n(e) = \frac{1}{e} - 1 < 0$

$1 < p_n < e$

$f_{n+2}(x) - f_n(x) = \frac{1}{x} - (f_{n+2}(x))^{2n+4} - \frac{1}{x} + (f_n(x))^{2n+2}$
 $= (f_n(x))^{2n+2} (1 - (f_{n+2}(x))^{2n+2})$

$\forall x \in (1, e) \quad \begin{cases} 0 < f_n(x) < 1 \\ -(f_n(x))^{2n+2} > -1 \\ 1 - (f_n(x))^{2n+2} > 0 \end{cases} \quad \& \quad (f_n(x))^{2n+2} > 0$

$f_{n+2}(x) - f_n(x) > 0$

$\forall x \in (1, e)$

$f_{n+2}(x) > f_n(x)$
 $f_{n+2}(p_n) > f_n(p_n) \quad \& \quad f_n(p_n) = 0$