

بـ بين أنه إذا كان  $p$  عددا أوليا يقسم العدد  $n$  فإن  $[4] \equiv 1$

جـ استنتج أن المجموعة  $A$  غير منتهية

### التمرين الثالث

ليكن  $n$  عددا طبيعيا بحيث  $n \geq 3$ .

نعتبر الدالة العددية  $f_n$  المعرفة على المجال  $]0, \infty[$  بما يلي :  $f_n(x) = x - n \ln x$

1 أـ أحسب النهايات التالية  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$

بـ أحسب المشتقة  $f'_n(x)$  وضع جدول تغيرات الدالة  $f_n$

2 بين أن المعادلة  $f_n(x) = 0$  تقبل حلين  $U_n$  و  $V_n$  بحيث  $0 < U_n < n < V_n$

3 أـ بين أن  $1 < U_n < e$  ( $\forall n \geq 3$ )

بـ تحقق أن  $f_n(U_{n+1}) = \ln U_{n+1}$  واستنتج أن  $(U_n)_n$  متتالية تناقصية

جـ بين أن  $e^{\frac{1}{n}} < U_n < e^{\frac{3}{n}}$  ( $\forall n \geq 3$ ) وأستنتج  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

4 أـ أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$  وبين أن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln V_n}{\ln n} = 1$  ثم حدد  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln V_n}{\ln n}$

5 أـ بين أن  $V_n > n \ln n$  ( $\forall n \geq 3$ )

بـ بين أن  $f_n(n^2) = n f_2(n)$  ( $\forall n \geq 3$ ) واستنتج أن  $V_n < n^2$  ( $\forall n \geq 3$ )

( يمكن استعمال رتبة  $f_2$  ونعطي  $f_2(3) > 0$  )

جـ استنتج أن  $V_n \leq 2n \ln n$  ( $\forall n \geq 3$ )

دـ بين أن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{V_n}{n \ln n} = 1$

### التمرين الأول

نعتبر في  $\mathbb{C}$  المعادلة  $(E) \frac{1}{2}Z^3 - (1+i)Z^2 + 2(1+i)Z - 4i = 0$

1 أـ تحقق أن العدد  $Z_0 = 2i$  حلا للمعادلة  $(E)$

بـ حدد الأعداد  $\alpha, \beta$  بحيث يكون :

$$(E) \Leftrightarrow (Z - 2i) \left( \frac{1}{2}Z^2 + \alpha Z + \beta \right) = 0$$

2 في المستوى العقدي  $(P)$  منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

نعتبر النقط  $A(1+i\sqrt{3})$  ،  $B(1-i\sqrt{3})$  و  $C(2i)$

أـ أحسب  $\frac{z_C}{z_A}$  واستنتج طبيعة المثلث  $OAC$  محددًا قياسًا للزاوية  $(\widehat{OA, OC})$

بـ حدد  $d$  لحق النقطة  $D$  منتصف القطعة  $[AC]$  وبين أن  $[\arg(d)] \equiv \frac{5\pi}{12} [2\pi]$

جـ استنتج قيمة كل من  $\sin \frac{5\pi}{12}$  و  $\cos \frac{5\pi}{12}$

3 نعتبر الدورانين  $R_1 \left( A, -\frac{\pi}{2} \right)$  و  $R_2 \left( A, \frac{\pi}{2} \right)$  ونضع  $O' = R_1(O)$  ،  $B' = R_2(B)$

أـ حدد  $Z_{O'}$  لحق  $O'$  وبين أن لحق النقطة  $B'$  هو  $b' = 1 + 2\sqrt{3} + i\sqrt{3}$

بـ لتكن  $I$  منتصف القطعة  $[OB]$  بين أن ارتفاع المثلث  $AO'B'$

### التمرين الثاني

ليكن  $p$  عددا أوليا أكبر من 3 و  $a$  عددا من  $\mathbb{Z}$  بحيث  $a^2 + 1 \equiv 0 [p]$

1 أـ بين أن  $a^{p-1} \equiv 1 [p]$

بـ استنتج أن  $[4] \equiv 1 [p]$

2 لتكن  $A$  مجموعة الأعداد الأولية والتي تكتب على الشكل  $4k + 1$ .

نفترض أن  $A$  مجموعة منتهية ونضع  $n = \left( 2 \prod_{p_k \in A} p_k \right)^2 + 1$

أـ بين أن العدد 3 لا يقسم العدد  $n$  (بتطبيق مبرهنة فيرما)

التحريز الاول: الأعداد العقدية

$$\arg\left(\frac{z_c}{z_a}\right) = \frac{\pi}{6} (2\pi) \text{ و } \left|\frac{z_c}{z_a}\right| = 1$$

$$\arg\left(\frac{z_c}{z_a}\right) = \frac{\pi}{6} (2\pi) \text{ و } OA = OC$$

$$(\vec{OA}, \vec{OC}) = \frac{\pi}{6} (2\pi) \text{ و } OA = OC$$

OAC مثلث متساوي الساقين

$$(\vec{OA}, \vec{OC}) = \frac{\pi}{6} (2\pi)$$

ب- لجد D منتصف (AC)

$$d = \frac{z_a + z_c}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3} + i}{2}$$

D منتصف (AC) و OAC مثلث متساوي الساقين

$$(\vec{OD}, \vec{OC}) = \frac{1}{2} (\vec{OA}, \vec{OC}) (2\pi)$$

$$(\vec{OD}, \vec{OC}) = \frac{\pi}{12} (2\pi)$$

$$\arg(d) = (\vec{OD}, \vec{OC}) (2\pi)$$

$$= (\vec{OD}, \vec{OC}) + (\vec{OC}, \vec{OD}) (2\pi)$$

$$= \arg c - \frac{\pi}{12} (2\pi)$$

$$= \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{12} (2\pi)$$

$$\arg(d) = \frac{5\pi}{12} (2\pi)$$

ج- ضيقة:  $\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\operatorname{Re}(d)}{|d|}$  و  $\sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\operatorname{Im}(d)}{|d|}$

$$\arg(d) = \frac{5\pi}{12} (2\pi)$$

$$\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\operatorname{Re}(d)}{|d|}$$

$$\sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\operatorname{Im}(d)}{|d|}$$

$$|d| = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

$$\sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} + 2}{2\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

$$\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

1/5

لدينا:  $(E) \frac{1}{2} z^3 - (1+i)z^2 + 2(1+i)z - 4i = 0$

$$z_0 = 2i$$

نتحقق أن  $z_0$  حل للمعادلة (E)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(2i)^3 - (1+i)(2i)^2 + 2(1+i)2i - 4i \\ &= \frac{1}{2}(2i)^3 - (1+i)(2i)^2 + 2(1+i)2i - 4i \\ &= -4i + 4(1+i) + 4i(1+i) - 4i \\ &= -4i + 4 + 4i + 4i - 4 - 4i \\ &= 0 \end{aligned}$$

وكل  $z_0$  حل للمعادلة (E)

ب- لدينا:  $(z - z_0)(\frac{1}{2}z^2 + \alpha z + \beta)$

$$= \frac{1}{2}z^3 + (\alpha - z_0)z^2 + (\beta - 2\alpha z_0)z - 2\beta$$

$$\begin{cases} \alpha - z_0 = -1 \\ \beta - 2\alpha z_0 = 2 + 2i \\ -2\beta = -4i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

و عليه (E) نصيغ:

$$\frac{1}{2}z^2 - z + 2 = 0 \text{ و } z = 2i$$

$$\Delta = -3$$

أذن للمعادلة  $\frac{1}{2}z^2 - z + 2$  حلين:

$$z_1 = 1 - i\sqrt{3}$$

$$z_2 = 1 + i\sqrt{3}$$

$$S_c = \{2i, 1 - i\sqrt{3}, 1 + i\sqrt{3}\}$$

$$\frac{z_c}{z_a} = \sqrt{\frac{2i}{1+i\sqrt{3}}}$$

$$\frac{z_c}{z_a} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$a^{p-1} \equiv 1(p) \quad \text{و عليه}$$

(ب) لك عدد  $a$  من  $Z'$  لدينا:

$$\lambda \equiv 0(4) \quad \lambda \equiv 1(4)$$

$$\lambda \equiv 2(4) \quad \lambda \equiv 3(4)$$

$$\lambda \equiv 0(4) \Leftrightarrow 4/\lambda \quad \text{لدينا}$$

$$\lambda \equiv 2(4) \Leftrightarrow x \text{ زوجي}$$

كأن  $p$  أولي فان:

$$p \equiv 1(4) \quad \text{أو} \quad p \equiv 3(p)$$

$$p \equiv 3(4) \quad \text{لفرضنا أن}$$

$$p = 4k + 3 \quad \text{اذن}$$

$$a^{p-1} \equiv 1(p) \quad \text{وحسب ماسيف}$$

$$(1) \quad a^{4k+2} \equiv 1(p)$$

$$a^2 \equiv -1(p) \quad \text{و من جهة لدينا}$$

$$(2) \quad (a^2)^{2k+1} \equiv -1(p)$$

$$1 \equiv -1(p) \quad \text{من (1) و (2) لدينا}$$

وهذا غير صحيح لان  $p > 3$

$$p \equiv 1(4) \quad \text{و بالتالي فان}$$

$$(2) \quad 3 \notin A \quad \text{لدينا: } (3 \notin 1(4) \text{ ولا } 3 \notin A)$$

$$(\forall p_k \in A) \quad 3 \cap (p_k) = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$3 \cap \left( \prod_{p_k \in A} p_k \right) = 1$$

$$3 \cap 2 = 1 \quad \text{و لدينا}$$

$$3 \cap \left( \prod_{p_k \in A} p_k \right) = 1 \quad \Leftrightarrow$$

و عليه حسب فيرما فان:

$$\left( \prod_{p_k \in A} p_k \right)^{3-1} \equiv 1(3)$$

$$\left( \prod_{p_k \in A} p_k \right)^2 \equiv 1(3)$$

$$n \equiv 2(3) \quad \text{منه}$$

$$\Leftrightarrow 3 \text{ لا يقسم } n$$

2/5

$$(3) \quad \text{لدينا: } o' = R_1(A, \frac{\pi}{3})$$

$$\text{اذن } z'_1 - z_n = e^{-i\frac{\pi}{3}} (z_0 - z_n)$$

$$z'_1 = -i(z_0) + z_n$$

$$\text{منه } z'_1 = i(1+i\sqrt{3}) + 1+i\sqrt{3}$$

$$z'_1 = (1-\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3}) \quad \text{و عليه}$$

$$b' = R_2(A, \frac{\pi}{2}) \quad \text{لدينا:}$$

$$b' - z_n = e^{i\frac{\pi}{2}} (z_0 - z_n)$$

$$b' = i(1-i\sqrt{3} - 1-i\sqrt{3}) + 1-i\sqrt{3}$$

$$b' = (2\sqrt{3} + 1) + i\sqrt{3} \quad \text{و عليه}$$

و I منتصف (ob) اذن: كفاية

$$z'_1 = \frac{z_0 + z_b}{2} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{z_n - z_1}{z'_1 - z'_2} \quad \text{لدينا}$$

$$= \frac{1+i\sqrt{3} - 1-k + i\sqrt{3}k}{1+2\sqrt{3}+i\sqrt{3} - 1+i\sqrt{3} - i - i\sqrt{3}}$$

$$= \frac{i(3\sqrt{3} - i)}{3\sqrt{3} - i} = \frac{1}{2} i \in i\mathbb{R} \quad \text{منه}$$

$$(ob') \perp (AI) \quad \text{و عليه}$$

منه: (AI) ارتفاع للمثلث  $AO'B'$

التعميم الثاني: الحسابات

$$a^2 + 1 \equiv (p) \quad (1) \quad \text{و}$$

$$(\exists k \in \mathbb{R}) \quad a^2 + 1 = kp$$

$$pk - axa = 1$$

$$ap = 1 \quad \text{وحسب فيرما فان}$$

و  $p$  أولي. حسب فيرما فان:

$$a^p \equiv a(p)$$

$$p \mid a(a^{p-1} - 1)$$

اذن  $pa = 1$  فان:

$$p \mid a^{p-1} - 1$$

التصنيف 3 : دراسة دالة

$\forall x \in ]0, +\infty[ \quad f_n(x) = x - n \ln x \quad (1)$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - n \ln x$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$  لدينا

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = +\infty$  إذن

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - n \ln x$   
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - n \frac{\ln x}{x}\right)$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$  كما آت

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - n \frac{\ln x}{x} = 1$  فإن

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$  وعليه

$f'_n(x) = (x - n \ln x)'$

$= 1 - \frac{n}{x} = \frac{x - n}{x}$

إذن إشارات  $f'_n(x)$  هي إشارة  $x - n$

$x$	$0$	$n$	$+\infty$
$f_n$	$+\infty$	$n(1 - \ln n)$	$+\infty$

(2) لنك  $f_n$  :  $f_n = g$  و قصور  $f_n$  على  $]0, n[$

و هضمة و تناقصية قطعا على  $]0, n[$

$\Leftrightarrow$  و تقابلنا  $]0, n[$  على  $]n(1 - \ln n), +\infty[$

كأننا  $\ln n > 1$  فإن  $n > 3$

أي آت  $n(1 - \ln n) < 0$

$0 \in ]n(1 - \ln n), +\infty[$

وعليه  $(\exists! u_1 \in ]0, n[) \quad g(u_1) = 0$

$(\exists! u_2 \in ]0, n[) \quad f_n(u_2) = 0$

و لنك  $B = f_n^{-1}$  قصور  $f_n$  على  $]n(1 - \ln n), +\infty[$

$B$  هضمة و تزايدية قطعا  $]n(1 - \ln n), +\infty[$

ب- ليكن  $p$  أولي و  $p/n$

لدينا  $p \neq 3$  لأن 3 لا يقسم  $n$

$n \equiv 0 \pmod{p}$

$a^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$

$(a = 2\pi p_k)$

و حسب نتيجة السؤال (1) فإن:

$p \equiv 1 \pmod{4}$

ج- نفترض أن المجموعة  $A$  منتهية

ونضع:  $A = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$

و نعتبر العدد  $n = \left(2 \prod_{j=1}^m p_j\right)^2 + 1$

لدينا:  $n \neq p_1, p_2, \dots, p_m$

لتحقق أن: " $p_k$  لا يقسم  $n$ "

$\forall k \in \{1, \dots, m\}$

نفترض أن  $p_k/n$

ولدينا:  $p_k / \left(2 \prod_{j=1}^m p_j\right)^2$

$p_k/n > p_k / \left(2 \prod_{j=1}^m p_j\right)^2$

وعليه  $p_k/1 < p_k/n$  يمكن

$\Leftarrow p_k$  لا يقسم  $n$ .

نفترض أن  $n$  غير أولي

$\Leftrightarrow n$  يقبل قاسم أولي  $p$

و حسب ما سبق فإن  $p \equiv 1 \pmod{4}$

إذن  $p \in A \Leftrightarrow$  تناقض

$\Leftrightarrow n$  أولي و  $n = 4 \left(\prod_{j=1}^m p_j\right)^2 + 1$

أي  $n \in A$  و يتناقض مع

$A$  منتهية.

إذن: المجموعة  $A$  غير منتهية.

$$\frac{1}{n} < \ln(U_n) < \frac{3}{n} \quad \text{أي}$$

$$(v_n > 3) \quad e^{\frac{1}{n}} < U_n < e^{\frac{3}{n}} \quad \text{أي}$$

$$(v_n > 3) \quad v_n > n \quad \text{أي (4)}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \quad \text{أي}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty \quad \text{أي}$$

$$f_n(v_n) = 0 \quad \text{أي}$$

$$v_n = n \ln(v_n) \Leftrightarrow \ln v_n = \ln n + \ln(\ln v_n)$$

$$\frac{\ln v_n}{\ln n} = 1 + \frac{\ln(\ln v_n)}{\ln n} \quad \text{أي}$$

$$\frac{\ln v_n}{\ln n} - \frac{\ln(\ln v_n)}{\ln n} = 1 \quad \text{أي}$$

$$\frac{\ln v_n}{\ln n} \left( 1 - \frac{\ln(\ln v_n)}{\ln v_n} \right) = 1 \quad \text{أي}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln v_n)}{\ln v_n} = 0 \quad \text{أي}$$

$$\frac{\ln v_n}{\ln n} = \frac{1}{1 - \frac{\ln(\ln v_n)}{\ln v_n}} \quad \text{أي}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty \quad \text{أي}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(v_n) = +\infty \quad \text{أي}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln v_n)}{\ln v_n} = 0 \quad \text{أي}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln v_n}{\ln n} = 1 \quad \text{أي}$$

$$f_n(v_n) = 0 \Leftrightarrow v_n = n \ln v_n \quad \text{أي (5)}$$

$$\ln v_n > \ln n \Leftrightarrow v_n > n \quad \text{أي}$$

$$n \ln(U_n) > n \ln n \quad \text{أي}$$

$$(v_n > 3) \quad v_n > n \ln n \quad \text{أي}$$

هذا إنجاز التظنية: بسند العدم

+15

$f_n$  تتزايد من  $J_{n,+\infty}$  نحو  $J_{n,+\infty}$  أي

$0 \in J_n(1-\ln n), +\infty[$  أي

فإن:  $(\exists! v_n \in J_{n,+\infty}) f_n(v_n) = 0$

$(\exists! v_n \in J_{n,+\infty}) f_n(v_n) = 0$

(3) 1- لدينا  $U_n$  هو حل المعادلة  $f_n(x) = 0$

على المجال  $J_{n,+\infty}$  و  $e \in J_{n,+\infty}$

أي  $f_n(e) = e - n < 0$  مع  $f_n(1) = 1 > 0$

$f_n(c) = e - n < 0$  ( $n > 3 > e$ )

$$f_n(c) < 0 < f_n(1)$$

$$f_n(c) < f_n(U_n) < f_n(1)$$

و  $f_n$  تناقصية على  $J_{n,+\infty}$

$$(v_n > 3) \quad 1 < U_n < e \quad \text{أي}$$

$$\begin{aligned} f_n(U_{n+1}) &= U_{n+1} - n \ln(U_{n+1}) \\ &= U_{n+1} - (n+1) \ln U_{n+1} + \ln(U_{n+1}) \\ &= f_n(U_{n+1}) + \ln(U_{n+1}) \end{aligned}$$

(لأن  $f_n(U_{n+1}) = 0$ )

$$f_n(U_{n+1}) = \ln U_{n+1} \quad \text{أي}$$

استنتاج

لدينا  $\ln(U_{n+1}) > 0 \Leftrightarrow U_{n+1} > 1$

$$f_n(U_{n+1}) > 0 = f_n(U_n)$$

$\exists! x \in C$  بين  $U_n$  و  $U_{n+1}$

و  $f_n$  تناقصية على

$$J_{n,+\infty} \subset J_{n+1,+\infty}$$

$$U_{n+1} < U_n \quad \text{أي}$$

$(U_n)_{n \geq 3}$  تناقصية

$$U_n = n \ln U_n \Leftrightarrow f_n(U_n) = 0 \quad \text{أي (ج)}$$

$$1 < U_n < e < 3 \quad \text{أي}$$

$$1 < n \ln U_n < 3 \quad \text{أي}$$

ب- لدينا:  $f_n(n^2) = n^2 - n \ln(n^2)$   
 $= n^2 - 2n \ln n$   
 $= n(n - 2 \ln n)$

$f_n(n^2) = n f_2(n) \quad (n \geq 3)$

استنتاج:

$f_2'(x) = \frac{x-2}{x} \Leftrightarrow f_2(x) = x - 2 \ln x$

$f_2$  تزايدية على  $[2, +\infty[$

كأن:  $f_2(n) \geq f_2(n)$  فإن  $n \geq 3$

$f_2(n^2) > 0 = f_n(V_n)$  ومنه

لدينا  $V_n$  و  $n^2$  و  $J_{n, +\infty}$

$f_n$  تنال قيمته على  $J_{n, +\infty}$

اذن:  $(n \geq 3) \quad n^2 > V_n$

ج- لدينا  $f(V_n) = 0 \Rightarrow V_n = n \ln(V_n)$

وكأن  $n^2 > V_n$  فإن  $2 \ln(n^2) > \ln(V_n)$

$2n \ln n > n \ln V_n$  أي

ومنه  $(n \geq 3) \quad V_n < 2n \ln n$

د- لدينا  $\frac{V_n}{n \ln n} = \frac{n \ln V_n}{n \ln n} = \frac{\ln V_n}{\ln n}$

(اذن:  $V_n = n \ln(V_n)$ )

لدينا:  $n \ln(n) < V_n < 2n \ln n$

$\ln n + \ln(\ln n) < \ln V_n < \ln(n) + \ln(2 \ln n)$

$1 + \frac{\ln(\ln n)}{\ln n} < \frac{\ln V_n}{\ln n} < 1 + \frac{\ln(2 \ln n)}{\ln n}$

$1 + \frac{\ln(\ln n)}{\ln n} < \frac{V_n}{n \ln n} < 1 + \frac{2 \ln(2 \ln n)}{2 \ln n}$

كأن:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln n)}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2 \ln n)}{2 \ln n} = 0$

فإن:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{V_n}{n \ln n} = 1$

من إنجاز التكملة: سنة العشرة  
ع.ع. ر.ع.