مسألة (16 نقطة)

الجزء (1) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$f(x)=\frac{\arctan x}{x}\quad ;\quad x\neq 0 \quad \text{و} \quad f(0)=1$$

1) بين أن f زوجية و أحسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ (1 ن)

2) أ- بين أن $(\forall t\in\mathbb{R}^{+})\quad 1-t^2\leq \frac{1}{1+t^2}\leq 1$ (0.5 ن)

و استنتج أن $(\forall x\in\mathbb{R}^{+})\quad x-\frac{x^3}{3}\leq acr\tan x\leq x$ (0.5 ن)

ب- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين $x_0=0$ (0.5 ن)

3) أ- باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية بين أن $(\forall x\in\mathbb{R}^{+})\quad \arctan x\geq \frac{x}{1+x^2}$

ب- أحسب المشتقة $f'(x)$ و أدرس تغيرات الدالة f (0.5 ن)

الجزء (2) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$g(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\quad ;\quad x\neq 0 \quad \text{و} \quad g(0)=1$$

1) بين أن الدالة g زوجية (0.5 ن)

2) أ- بين أن $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})\quad 1-g(x)=\frac{1}{x}\int_0^x (1-f(t))\,dt$ (0.5 ن)

ب- استنتج أن g متصلة على يمين $x_0=0$ (1 ن)

ج- بين أن g قابلة للاشتقاق على يمين $x_0=0$ و أن $g'_d(0)=0$ (0.5 ن)

3) أ- بين أن $(\forall x\in[1,+\infty[)\quad 0\leq \int_1^x f(t)\,dt\leq \frac{\pi}{2}\ln x$ (0.5 ن)

ب- استنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ (1 ن)

4) أ- بين أن g قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

و أن $x^2g'(x)=\arctan x-\int_0^x f(t)\,dt$ لكل x من $]0,+\infty[$ (1) (1 ن)

ب- نضع $h(x)=x^2g'(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$.

تحقق أن $x\,h'(x)=\frac{x}{1+x^2}-\arctan x$ لكل x من $]0,+\infty[$ (0.5 ن)

ج- استنتج أن $g'(x)<0$ لكل x من $]0,+\infty[$ ثم ضع جدول تغيرات g (1 ن)

5) أرسم منحنى الدالة g (0.5 ن)

الجزء (3)

1) أ- بين أن $f(x)\leq g(x)\leq 1\quad (\forall x\in\mathbb{R}^{+*})\quad (2)$ (1 ن)

ب- استنتج أن $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})\quad |g'(x)|\leq \frac{1}{x}(1-f(x))$ (1 ن)

ج- تحقق أن $(\forall x\in\mathbb{R}^{*})\quad \frac{1}{x}(1-f(x))=\frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\,dt$ (0.5 ن)

2) أ- بين أن $(\forall t\in\mathbb{R}^{+*})\quad 0\leq \frac{t}{1+t^2}\leq \frac{1}{2}$ (0.5 ن)

ب- استنتج أن $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})\quad |g'(x)|\leq \frac{1}{4}$ (0.5 ن)

3) بين أن المعادلة $g(x)=x$ تقبل في المجال $[0,1]$ حلا وحيدا α (0.5 ن)

4) نعتبر المتتالية $(u_n)_n$ المعرفة بما يلي : $u_0=0$ و $u_{n+1}=g(u_n)$

أ- بين أن $(\forall n\in\mathbb{N})\quad 0\leq u_n\leq 1$ (0.5 ن)

ب- بين أن $(\forall n\in\mathbb{N})\quad |u_{n+1}-\alpha|\leq \frac{1}{4}|u_n-\alpha|$ (0.5 ن)

ج- استنتج أن المتتالية $(u_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها (0.5 ن)

أسئلة مستقلة (3 نقط)

1) حدد نهاية المتتالية $(U_n)_{n>0}$ المعرفة بما يلي : $U_n=\frac{1}{n^{p+1}}\sum_{k=1}^{k=n}k^p$

2) ليكن Z و Z' من $\mathbb{C}$. بين أن $|Z+Z'|^2\leq (1+|Z|^2)(1+|Z'|^2)$

3) ليكن Z عدد عقدي بحيث $|Z|=1$ بين أن $|1+Z|\geq 1$ أو $|1+Z^2|\geq 1$

تصحيح الغرض

"2" الأسدس "2"

الجزء (1)

1) لدينا : $D_f=\mathbb{R}$

اذن $(x\in\mathbb{R} \Rightarrow -x\in\mathbb{R})$

و $x\neq0$: $f(-x)=\frac{\arctan(-x)}{-x}=\frac{-\arctan(x)}{-x}$

$=f(x)$

(لأن: $t\mapsto\arctan(t)$ دالة فردية).

← اذن الدالة f دالة زوجية.

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan(x)}{x}=0$

(لأن $\lim_{x\to+\infty}\arctan(x)=\frac{\pi}{2}$)

---

2) $(\forall t\in\mathbb{R}^+)$: $t^4\geq0 \Rightarrow -t^4\leq0$

$\Rightarrow 1-t^4\leq1$

وحيث : $1-t^4=(1-t^2)(1+t^2)$

، $(1+t^2>0)$

اذن ، $(1-t^2)(1+t^2)\leq1$

أي ① $\left(1-t^2\leq\frac{1}{1+t^2}\right)$

ولدينا أيضا ، $(\forall t\in\mathbb{R}^+)$ $t^2+1\geq1$

اذن ② $\left(\frac{1}{t^2+1}\leq1\right)$

①و② $\Rightarrow$ $1-t^2\leq\frac{1}{t^2+1}\leq1$.

- لدينا $(\forall t\in\mathbb{R}^+)$ $1-t^2\leq\frac{1}{t^2+1}\leq1$

$(x>0)$ $\int_0^x(1-t^2)\,dt\leq\int_0^x\frac{1}{t^2+1}\,dt\leq\int_0^x dt$

$\left[t-\frac{t^3}{3}\right]_0^x\leq\left[\mathrm{Arct}(t)\right]_0^x\leq\left[t\right]_0^x$

أي $x-\frac{x^3}{3}\leq \mathrm{Arct}(x)\leq x$

ب. لنحسب $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

أي : $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-1}{x-0}$

أي $\lim_{x\to0^+}\frac{\mathrm{Arctan}(x)-x}{x^2}$

ولدينا $(\forall t\geq0)\ t-\frac{t^3}{3}\leq\mathrm{Arct}(t)\leq t$

إذن $-\frac{x^3}{3}\leq\mathrm{Arct}(x)-x\leq0$

أي $-\frac{x}{3}\leq\frac{\mathrm{Arct}(x)-x}{x^2}\leq0$

وحيث $\lim_{x\to0^+}\left(\frac{-x}{3}\right)=0$

اذن $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$

---

3) أ- نعتبر ، $t\xrightarrow{f}\mathrm{Arct}(t)$

f دالة متصلة على $[0,x]$ وقابلة للاشتقاق على $]0,x[$. اذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية .

$(\exists c\in]0,x[)$ $\mathrm{Arct}(x)-\mathrm{Arct}(0)=(x-0)f'(c)$

أي $\mathrm{Arct}(x)=x\,f'(c)$

وحيث : $f'(c)=\frac{1}{1+c^2}$.

و $0\leq c\leq x \Rightarrow 1\leq c^2+1\leq x^2+1$

أي $\frac{1}{1+c^2}\geq\frac{1}{x^2+1}$

أي $(x>0)$ $\frac{x}{1+c^2}\geq\frac{x}{x^2+1}$

أي $(\forall x\in\mathbb{R}^+)$ $\mathrm{Arct}(x)\geq\frac{x}{x^2+1}$

ب - لدينا f قابلة الاشتقاق على $\mathbb{R}^+$

و $(\forall x\in\mathbb{R}^*)\quad f'(x)=\dfrac{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)x-\text{Arct}(x)}{x^2}$

$$=\frac{x-(1+x^2)\,\text{Arct}(x)}{(1+x^2)\,x^2}$$

. لدينا $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\quad \arctan(x)\geqslant\dfrac{x}{x^2+1}$

أي $x-\text{Arctan}(x)(x^2+1)\leqslant 0$

أي $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\ :\ f'(x)\leqslant 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	0 ↗	1	↘ 0

(لأن الدالة f دالة زوجية)

الجزء (2).

1) لدينا ، $D_g=\mathbb{R}$

ادن $(x\in\mathbb{R}\Rightarrow -x\in\mathbb{R})$

أي $x\neq0\quad g(-x)=\dfrac{1}{(-x)}\displaystyle\int_0^{(-x)}f(t)\,dt$

نضع : $(-t=u)$ أي $(dt=-du)$

و $\begin{cases}t=0\Rightarrow u=0\\ t=x\Rightarrow u=x\end{cases}$

ادن $g(-x)=\dfrac{-1}{x}\displaystyle\int_0^x -f(-u)\,du$

وحيث أن الدالة : f دالة زوجية $(f(x)=f(-x))$

ادن $g(-x)=\dfrac{-1}{x}\displaystyle\int_0^x -f(u)\,du$

$$=\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\,du=g(x)$$

الدالة g دالة زوجية

2) أ. لدينا $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x(1-f(t))\,dt$

$$=\frac{1}{x}\left[\int_0^x 1\,dt-\int_0^x f(t)\,dt\right]$$

$$=\frac{1}{x}\left[[t]_0^x-\int_0^x f(t)\,dt\right]$$

$$=\frac{1}{x}\left[x-\int_0^x f(t)\,dt\right]$$

$$=1-\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$$

$$=1-g(x)$$

ادن $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})\quad 1-g(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x(1-f(t))\,dt$

2) ب. لدينا حسب (جزء I - 3 ب)

$(\forall t\in\mathbb{R}^+)\quad \text{arct}(t)\geqslant\dfrac{t}{1+t^2}$

$(t>0)\quad \dfrac{\text{arct}(t)}{t}\geqslant\dfrac{1}{1+t^2}$

يعني $f(t)\geqslant\dfrac{1}{1+t^2}$

أي $1-f(t)\leqslant 1-\dfrac{1}{1+t^2}$

$x>0\quad \displaystyle\int_0^x(1-f(t))\,dt\leqslant\int_0^x\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt$

$x>0\quad \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x(1-f(t))\,dt\leqslant\frac{1}{x}(x-\text{Arct}(x))$

وحيث أي $(\forall t\in\mathbb{R})\quad 0\leqslant f(t)\leqslant 1$

وذلك حسب سؤال (3.ب)

أي ، $1-f(t)\geqslant 0$

أي $\Rightarrow 0\leqslant\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x(1-f(t))\,dt\leqslant 1-\frac{\text{Arct}(x)}{x}$

أي $0\leqslant 1-g(x)\leqslant 1-f(x)$

، $\displaystyle\lim_{x\to0^+}1-f(x)=1-1=0$

و $1-g(x)\geqslant 0$

ادن $\displaystyle\lim_{x\to0^+}g(x)=1=g(0)$

أي أن متصلة عند $x=0$

2- لنحسب $\lim_{x\to0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{g(x)-1}{x}$

- لدينا $0\le 1-g(x)\le 1-f(x)$

أي $f(x)-1\le g(x)-1\le 0$

$(x>0)$ $\frac{f(x)-1}{x}\le\frac{g(x)-1}{x}\le 0$

(1) $\frac{\text{Arct}(x)-x}{x^2}\le\frac{g(x)-1}{x}\le 0.$

$\text{arct}(x)\ge\frac{x}{1+x^2}\Rightarrow \text{Arct}(x)-x\ge\frac{-x^4}{1+x^2}.$

أي (2) $\frac{\text{Arct}(x)-x}{x^2}\ge\frac{-x^2}{1+x^2}$

اذن من (1) و (2) نستنتج $\frac{-x^2}{1+x^2}\le\frac{g(x)-1}{x}\le 0$

و $\lim_{x\to0^+}\frac{-x^2}{1+x^2}=0 \Rightarrow \lim_{x\to0^+}\frac{g(x)-g(1)}{x}=0$

اذن g قابلة للاشتقاق على يمين 0 و $g'_d(0)=0$

وعليه $1-\frac{t^2}{3}\le f(t)\le 1$

$\left[t-\frac{t^3}{9}\right]_0^1\le\int_0^1 f(t)\,dt\le 1$

$1-\frac{1}{9}\le\int_0^1 f(t)\,dt\le 1$

أي $(x>0)$ $\frac{8}{9x}\le\frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\,dt\le\frac{1}{x}$

(1) اذن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\,dt=0$

وحسب $0\le\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt\le\frac{\pi}{2x}\ln(x)$

اذن $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt=0$

(لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi}{2x}\ln(x)=0$)

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$

لدينا $(\forall t\in[1,+\infty[)\ 0\le\text{arct}(t)\le\frac{\pi}{2}$

أي $t>0$ $0\le\frac{\text{arct}(t)}{t}\le\frac{\pi}{2t}$

$(x\ge1)$ $0\le\int_1^x\frac{\text{arct}(t)}{t}\,dt\le\int_1^x\frac{\pi}{2t}\,dt$

$0\le\int_1^x f(t)\,dt\le\left[\frac{\pi}{2}\ln(t)\right]_1^x$

$0\le\int_1^x f(t)\,dt\le\frac{\pi}{2}\ln(x).$

ومنه النتيجة.

---

3) ب- لدينا $g(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$

$=\frac{1}{x}\left(\int_0^1 f(t)\,dt+\int_1^x f(t)\,dt\right)$

$=\frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\,dt+\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt$

---

4) أ. $x\mapsto\frac{1}{x}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$

وحسب $f(t)$ متصلة على $\mathbb{R}^{+*}$ اذن تقبل دالة أصلية F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$

أي $\int_0^x f(t)\,dt=F(x)-F(0)$

أي $x\mapsto\int_0^x f(t)\,dt$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$

اذن: $x\overset{0.u}{\mapsto} g(x)$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$

$g'(x)=\frac{-1}{x^2}\int_0^x f(t)\,dt+\frac{1}{x}f(x)$

$=\frac{-1}{x^2}\int_0^x f(t)\,dt+\frac{1}{x}\left(\frac{\text{Arctan}(x)}{x}\right)$

$x^2g'(x)=\text{Arct}(x)-\int_0^x f(t)\,dt$

ب - تحقق أن $x h'(x) = \frac{x}{1+x^2} - \arctan(x)$

لكل x من $]0;+\infty[$:

لدينا

$\forall x \in]0;+\infty[; h(x) = x^2 g'(x)$

يعني أن

$h(x) = \arctan(x) - \int_0^x f(t)\,dt$

إذن

$h'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{\arctan(x)}{x}$

$\boxed{x h'(x) = \frac{x}{1+x^2} - \arctan(x)}$

ج - استنتج أن $g'(x)<0$ لكل x من $]0;+\infty[$

ثم ضع جدول تغيرات g :

لدينا حسب السؤال 3 - أ -

$\forall x \in]0;+\infty[\ ; \arctan(x) \geq \frac{x}{1+x^2}$

إذن $\frac{x}{1+x^2} - \arctan(x) \leq 0$

يعني أن $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ ; x h'(x) \leq 0$

إذن $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ ; h'(x) \leq 0$

ولدينا $h(0) = 0^2 \times g'(0) = 0$

x	0	$+\infty$
$h(x)$	0 ↘	

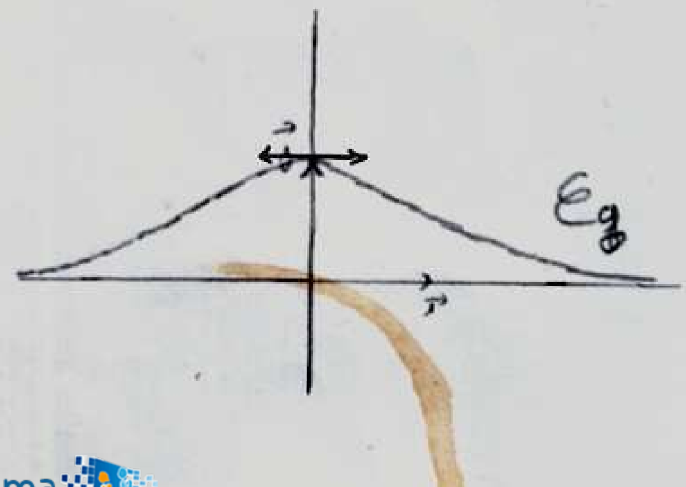
إذن $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ h(x) < 0$

ولدينا $\forall x \in \mathbb{R}_+^* ; h(x) = x^2 g'(x)$

إذن $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ g'(x) < 0}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	0 ↗	1	↘ 0

5 رسم المنحنى :



الجزء (3)

1 أ - بين أن $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ ; f(x) \leq g(x) < 1$

لدينا حسب السؤال 3 - أ - الجزء (1) : $x>0$

$\frac{\arctan(t)}{t} \geq \frac{1}{1+t^2} \ ; t \in [0;x]$

$\int_0^x \frac{\arctan(t)}{t}dt \geq \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt \ ; t \in [0;x]$

يعني أن $\int_0^x \frac{\arctan(t)}{t}dt \geq \arctan(x)$

إذن $\frac{1}{x}\int_0^x \frac{\arctan(t)}{t}dt \geq \frac{\arctan(x)}{x} \ ; x>0$

$\Longleftarrow \quad \forall x>0 \ ; g(x) \geq f(x)$

ولدينا انطلاقا من جدول تغيرات g :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* ; g(x) < 1$

إذن $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ f(x) \leq g(x) < 1$

ب - استنتج أن : $|g'(x)| \leq \frac{1}{x}(1-f(x)) \ ; x>0$

لدينا حسب 4 - أ -

$\forall x \in]0;+\infty[\ ; g'(x) = \frac{1}{x}(f(x) - g(x))$

$|g'(x)| = \frac{1}{x}|f(x) - g(x)| \quad ; \forall x>0$

ولدينا حسب السؤال السابق $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ f(x) \leq g(x)$

إذن $|g'(x)| = \frac{1}{x}(g(x) - f(x)) \ ; \forall x>0$

ولدينا أيضا حسب السؤال السابق $g(x) \leq 1 \ \forall x>0$

إذن $\frac{1}{x}(g(x) - f(x)) \leq \frac{1}{x}(1-f(x)) \ ; \forall x>0$

إذن $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ |g'(x)| \leq \frac{1}{x}(1-f(x))$

ج - تحقق أن :

$\forall x \in \mathbb{R}^* : \frac{1}{x}(1-f(x)) = \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}dt$

لدينا

$\frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}dt = \frac{1}{x^2}\left(\int_0^x 1 - \frac{1}{1+t^2}dt\right)$

$= \frac{1}{x^2}\left[t - \arctan(t)\right]_0^x = \frac{1}{x} - \frac{\arctan(x)}{x^2}$

إذن $\forall x \in \mathbb{R}^+ : \frac{1}{x}(1-f(x)) = \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}dt$

لأن $\left[\frac{1}{x}(1-f(x)) = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{\arctan(x)}{x}\right)\right]$

2 أ- بين أن : $\forall t\in\mathbb{R}_+^* \quad 0\le \frac{t}{1+t^2}\le\frac{1}{2}$

لدينا $\forall t\in\mathbb{R}_+^* \quad (t-1)^2\ge 0 \Rightarrow t^2+1\ge 2t$

إذن $\frac{1}{t^2+1}\le\frac{1}{2t} \Rightarrow \frac{t}{t^2+1}\le\frac{1}{2}$

ونعلم أن $\forall t\in\mathbb{R}_+^* \quad \frac{t}{1+t^2}\ge 0$

إذن $\forall t\in\mathbb{R}_+^* \quad 0\le\frac{t}{1+t^2}\le\frac{1}{2}$

ب - استنتج أن $\forall x\in\mathbb{R}_+^* \quad |g'(x)|\le\frac{1}{4}$

ليكن x من $\mathbb{R}_+^*$:

انطلاقا من 1-ب و 1-ج نستنتج أن

$|g'(x)|\le\frac{1}{x^2}\int_0^x\frac{t^2}{1+t^2}\,dt$

ولدينا حسب السؤال السابق :

$\forall t\in[0;x] \quad 0\le\frac{t^2}{1+t^2}\le\frac{1}{2}t$

$t\in[0;x] \ ; \ \int_0^x\frac{t^2}{1+t^2}\,dt\le\frac{1}{2}\int_0^x t\,dt$

إذن $\int_0^x\frac{t^2}{1+t^2}\,dt\le\frac{1}{4}x^2$

يعني أن $\frac{1}{x^2}\int_0^x\frac{t^2}{1+t^2}\,dt\le\frac{1}{4}$

إذن $\forall x\in\mathbb{R}_+^* \quad |g'(x)|\le\frac{1}{4}$

3 - بين أن $g(x)=x$ تقبل حلا وحيدا في $[0;1]$

نضع $h(x)=g(x)-x$

$x\mapsto h(x)$ ق. للاشتقاق على $]0;1[$

$h'(x)=g'(x)-1<0$ h تناقصية قطعا على $]0;1[$

ولدينا $h(0)=1$ و $h(1)=g(1)-1$

ولدينا $\forall x\in[0;1] \ g(x)\le 1$

إذن $h(1)=g(1)-1\le 0$

إذن $h(0)\times h(1)\le 0$ و $x\mapsto h(x)$ متصلة على $[0;1]$ وقابلة للاشتقاق عليه .

إذن $\exists!\,\alpha\in[0;1] \ ; \ g(\alpha)=\alpha$

4 أ- بين أن $\forall n\in\mathbb{N} \quad 0\le u_n\le 1$

من أجل $n=0$ لدينا $V: 0\le u_0=0\le 1$

نفترض أنه $0\le u_n\le 1$ ولنبين أن $0\le u_{n+1}\le 1$

لدينا $0\le u_n\le 1$ و g تناقصية ومتصلة على $[0;1]$

إذن $g(1)\le g(u_n)\le g(0)$

إذن $0\le u_{n+1}\le 1$ V

إذن حسب البرهان بالترجع فإن $\forall n\in\mathbb{N} \quad 0\le u_n\le 1$

ب - بين أن $\forall n\in\mathbb{N} : |u_{n+1}-\alpha|\le\frac{1}{4}|u_n-\alpha|$

لدينا $0\le u_n\le 1$ و $\alpha\in[0;1]$ و $g(\alpha)=\alpha$ | g ومتصلة على $[0;1]$ و ق. للاشتقاق عليه

إذن بتطبيق TAF على مجال طرفاه α و u_n

نجد أن $|g(u_n)-g(\alpha)|=|g'(c)|\,|u_n-\alpha|$

حيث أن $c\in]0;1[$

ونعلم أن $\forall x\in\mathbb{R}_+^* \quad |g'(x)|\le\frac{1}{4}$

إذن $c\in]0;1[\quad |g'(c)|\le\frac{1}{4}$

إذن $\forall n\in\mathbb{N} ; \ |g'(c)|\,|u_n-\alpha|\le\frac{1}{4}|u_n-\alpha|$

ولدينا $\forall n\in\mathbb{N} ; \ |g(u_n)-g(\alpha)|=|g'(c)|\,|u_n-\alpha|$

إذن $|u_{n+1}-\alpha|\le\frac{1}{4}|u_n-\alpha| \ ; \forall n\in\mathbb{N}$

ج - استنتج نهاية u_n وبين أنها متقاربة

لنبين أولا أن $\forall n\in\mathbb{N} \ ; \ |u_n-\alpha|\le\left(\frac{1}{4}\right)^n$

من أجل $n=0$ لدينا $|u_0-\alpha|\le 1$

وهذا صحيح لأن $(\alpha;u_0)\in[0;1]^2$

نفترض أن $|u_n-\alpha|\le\left(\frac{1}{4}\right)^n$

ولنبين أن $|u_{n+1}-\alpha|\le\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

لدينا $|u_n-\alpha|\le\left(\frac{1}{4}\right)^n$

إذن $\frac{1}{4}|u_n-\alpha|\le\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

إذن $|u_{n+1}-\alpha|\le\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

إذن حسب افتراض الترجع فإن $\forall n\in\mathbb{N} \ ; \ |u_n-\alpha|\le\left(\frac{1}{4}\right)^n$

وبما أن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0 \ ; \ \left|\frac{1}{4}\right|<1$

فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n-\alpha=0$

$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n=\alpha}$

إذن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة .

أسئلة مستقلة

1 - حدد نهاية المتتالية $(u_n)_{n>0}$ المعرفة كالتالي:

$$u_n = \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^{n} k^p$$

لدينا $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^p$

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

حيث $f(x) = x^p$

f دالة متصلة وق. للاشتقاق على $]0;1[$

إذن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \int_0^1 x^p dx = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^1$

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{p+1}$$

2 - ليكن z و z' من $\mathbb{C}$ بين أن

$$|z+z'|^2 \leq (1+|z|^2)(1+|z'|^2)$$

نعلم أن: $|z+z'| \leq |z|+|z'|$

$$|z+z'|^2 \leq |z|^2+|z'|^2+2|z \times z'|$$

ولدينا $(1+|z|^2)(1+|z'|^2) = 1+|z'|^2+|z|^2+|zz'|^2$

نعلم أن $(|zz'|-1)^2 \geq 0$

إذن $|zz'|^2+1 \geq 2|z \cdot z'|$

$$|zz'|^2+1+|z|+|z'| \geq 2|z \times z'|+|z|^2+|z'|^2$$

إذن $|z+z'|^2 \leq (1+|z|^2)(1+|z'|^2)$

3 - بين أنه إذا كان $|z|=1$ فإن

$|1+z| \geq 1$ أو $|1+z^2| \geq 1$

لدينا $|z|=1$ إذن $\exists \theta \in]-\pi;\pi] ; z = e^{i\theta}$

ولدينا $|1+z| = |1+e^{i\theta}| = |2\cos\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}|$

إذن

$$|1+z| = 2|\cos\frac{\theta}{2}|$$

إذا كان $\theta \in \left[-\frac{2\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right]$ أي أن $\frac{\theta}{2} \in \left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$

فإن $|\cos\frac{\theta}{2}| \geq \frac{1}{2}$ ومنه فإن $|1+z| \geq 1$

وإذا كان $\theta \notin \left[-\frac{2\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right]$ فإن

$\cos\theta \leq -\frac{1}{2}$ أي أن $|\cos\theta| \geq \frac{1}{2}$

ولدينا $|1+z^2| = |1+e^{2i\theta}|$

$$|1+z^2| = |2\cos\theta\, e^{i\theta}| = 2|\cos\theta|$$

ولدينا $\forall \theta \in \left]-\pi;-\frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{2\pi}{3};\pi\right] ; |\cos\theta| \geq \frac{1}{2}$

إذن $|1+z^2| \geq 1$

خلاصة:

$|z|=1$

$|1+z| \geq 1$
أو
$|1+z^2| \geq 1$

من انجاز:

• مهدي بنكروم

• وليد حفيظ الدين

بإشراف الأستاذ "العانتي"