التمرين الأول :

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $Z^2-2i\sqrt{3}Z-4=0$

2) نضع $a=1+i\sqrt{3}$; $b=-1+i\sqrt{3}$ و نعتبر في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقطتين $A(a)$; $B(b)$.

ليكن R_1 الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{3}$ و R_2 الدوران الذي مركزه B و زاويته $\frac{2\pi}{3}$ و نعتبر التطبيق $f=R_2\circ R_1$

أ- بين أن $f(B)=A$

ب- لتكن $M(m)$ نقطة من (P) و نعتبر النقطتين $N=R_1(M)$ و $M'=f(M)$

(i) حدد بدلالة m العدد العقدي n لحق النقطة N

(ii) بين أن لحق النقطة M' هو العدد $m'=-m+2i\sqrt{3}$ و استنتج طبيعة التطبيق f

ج- حدد مجموعة النقط $M(m)$ التي يكون من أجلها M , N , M' مستقيمية

التمرين الثاني :

نعتبر في الفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ المجموعة E للمصفوفات والتي تكتب على الشكل $M=\begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+2b \end{pmatrix}$ حيث $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ و نضع $J=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

1) أ- بين أن $(E,+)$ زمرة تبادلية

ب- بين أن $(E,+,\cdot)$ فضاء حقيقي و أعط بعده

2) أحسب J^2 بدلالة I , J واستنتج الجداء $M(a,b)\times M(c,d)$

3) نعتبر التطبيق f المعرف ب : $\begin{cases} f & : & E\to\mathbb{C} \\ M(a,b) & \to & z=(a+b)+ib \end{cases}$

أ- بين أن f تقابل و عرف تقابله العكسي

ب- بين أن f تشاكل من $(E,\times)$ نحو $(\mathbb{C},\times)$

ج- استنتج بنية $(E,+,\times)$

د- حدد في E حلول المعادلة $M^3-I+J=\theta$ حيث θ هي المصفوفة المنعدمة في $M_2(\mathbb{R})$

التمرين الثالث :

الجزء (1) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $D=]0,+\infty[$ بما يلي :

$$f(x)=\frac{x-1}{x\ln x}\quad ;\quad x\neq 1 \qquad \text{و} \qquad f(1)=1$$

1) بين أن الدالة f متصلة على D

2) أ- بين أن $f'(x)=\frac{\ln x-x+1}{(x\ln x)^2}$ $(\forall x\in D-\{1\})$

ب- بين أن الدالة f تناقصية على D

الجزء (2)

F دالة معرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $\begin{cases} F(x)=\int_x^{x^2} f(t)\,dt & , \quad x\neq 0 \;;\; x\neq 1 \\ F(0)=-\ln 2 \quad ; & F(1)=0 \end{cases}$

1) أ- بين أن $\int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln t}dt=\ln 2$ $(\forall x\in]0,1[)$

ب- بين أن $(x^2-1)\ln 2\le F(x)\le (x-1)\ln 2$ $(\forall x\in]0,1[)$

ج- أدرس اتصال الدالة F على يمين 0 و على يسار 1

2) أ- بين أن $\frac{x^2-x}{\ln x}\le F(x)+\ln 2\le\frac{x^2-x}{2\ln x}$ $(\forall x\in]0,1[)$

ب- أدرس قابلية اشتقاق الدالة F على يمين 0

3) ليكن x من المجال $]1,+\infty[$.

أ- بين أن $F(x)=(x^2-x)f(c)$ $(\exists c\in[x,x^2])$

ب- أدرس اتصال و قابلية اشتقاق الدالة F على يمين النقطة 1

ج- بين أن $F(x)\ge\ln x$ و أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$

4) أ- بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على كل من $]0,1[$ و $]1,+\infty[$ و أن $F'(x)=\frac{x-1}{\ln x}$

ب- أدرس منحى تغيرات الدالة F و ضع جدول تغيراتها

2011-2012.

تصحيح الفرض المحروس رقم 3 الأسدس II

التمرين 1 :

1) لنحل المعادلة : $z^2 - 2i\sqrt{3}z - 4 = 0$

$\Delta = 4 = 2^2$

ومنه :

$z_1 = \frac{2i\sqrt{3} - 2}{2} = -1 + \sqrt{3}i$

$z_2 = \frac{2i\sqrt{3} + 2}{2} = 1 + \sqrt{3}i$

إذن مجموعة حلول المعادلة هي :

$S = \{1 + \sqrt{3}i, -1 + \sqrt{3}i\}$.

2) أ. لكل نقطة $M(z)$ من المستوى العقدي نضع $M_1 = R_1(M)$ و $M_2 = R_2(M_1)$ ولتكن z_1 و z_2 لحقي النقطتين M_1 و M_2 .

$R_1(M) = M_1 \Leftrightarrow z_1 = ze^{i\frac{\pi}{3}}$

$R_2(M_1) = M_2 \Leftrightarrow z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z_1 - b) + b$

وعليه

$R_2 \circ R_1(M) \Leftrightarrow z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}(ze^{i\frac{\pi}{3}} - b) + b$

$\Leftrightarrow z_2 = -z - be^{i\frac{2\pi}{3}} + b$

ومنه :

$f(B) = R_2 \circ R_1(B) \Leftrightarrow z_2 = -\cancel{b} - be^{i\frac{2\pi}{3}} + \cancel{b}$

$\Leftrightarrow z_2 = -2e^{i(\pi - \frac{\pi}{3}) + \frac{2\pi}{3}}$

$\Leftrightarrow z_2 = -2e^{i\frac{4\pi}{3}}$

$\Leftrightarrow z_2 = 1 + i\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow z_2 = a$

وعليه :

$f(B) = A$.

ب) (i)

$N = R_1(M) \Leftrightarrow n = me^{i\frac{\pi}{3}}$

$\Leftrightarrow n = \frac{1}{2}m + \frac{\sqrt{3}}{2}mi$

(ii) لدينا الكتابة العقدية للتطبيق f

$z' = -z - b(e^{i\frac{2\pi}{3}} - 1)$

$z' = -z - (\sqrt{3}i - 1)(\frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{2})$

$z' = -z - (\frac{-3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}i - \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{2})$

$z' = -z + 2\sqrt{3}i$

ومنه

$f(M) = M' \Leftrightarrow m' = -m + 2\sqrt{3}i$

التمثيل العقدي للتطبيق f هو من الشكل : $z' = \alpha z + \beta$ حيث : $\alpha = -1 \in \mathbb{R}^* - \{1\}$

إذن فإن التطبيق f هو التحاكي الذي مركزه $\Omega(\sqrt{3}i)$ ونسبته -1

ج.

$\left(\text{نقط مستقيمية } N \text{ و } M' \text{ و } M \right) \Leftrightarrow \frac{m' - m}{n - m} \in \mathbb{R}$

$\frac{m' - m}{n - m} = \frac{-m + 2i\sqrt{3} - m}{\frac{1}{2}m + \frac{\sqrt{3}}{2}im - m}$

$= \frac{2(-m + i\sqrt{3})}{\frac{1}{2}m(-1 + \sqrt{3}i)}$

$= \frac{4(-m + i\sqrt{3})}{m(-1 + \sqrt{3}i)}$

$\frac{m' - m}{n - m} \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{4(-m + i\sqrt{3})}{m(-1 + \sqrt{3}i)} = \frac{4(-\bar{m} + i\sqrt{3})}{\bar{m}(-1 + \sqrt{3}i)}$

$\Rightarrow \bar{m}(-m + i\sqrt{3}) = m(-\bar{m} + i\sqrt{3})$

$\Rightarrow -|m|^2 + i\sqrt{3}\bar{m} = -|m|^2 + i\sqrt{3}m$

$\Rightarrow m = \bar{m}$

$\Rightarrow m \in \mathbb{R}$

ومنه : مجموعة النقط $M(m)$ التي يكون من أجلها M و N و M' مستقيمية هو محور الأفاصيل $(D): y = 0$

التمرين 2 :

A-1. لنبين أن $(E, +)$ زمرة تبادلية.

لدينا : $E \neq \emptyset$ ($\Theta \in E$ من أجل $a = b = 0$ حيث Θ المصفوفة المنعدمة)

ليكن A و B عنصرين من E .

$A\begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+2b \end{pmatrix}$ و $B\begin{pmatrix} x & y \\ -2y & x+2y \end{pmatrix}$ $(x, y, a, b) \in \mathbb{R}^4$

$$A - B = \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+2b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x & -y \\ 2y & -x-2y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a-x & b-y \\ -2(b-y) & (a-x)+2(b-y) \end{pmatrix}$$

نضع: $\alpha = a-x$ و $\beta = b-y$

$$A - B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -2\beta & \alpha+2\beta \end{pmatrix} \in E \quad (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$$

إذن: $(E,+)$ زمرة جزئية من الزمرة $(M_2(\mathbb{R}),+)$

وبما أن: $(M_2(\mathbb{R}),+)$ زمرة تبادلية

فإن: $(E,+)$ زمرة تبادلية.

ب- لنبين أن: $(E,+,\cdot)$ فضاء حقيقي

لدينا: $(E,+)$ زمرة جزئية من $(M_2(\mathbb{R}),+)$

لنبين أن E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\cdot)$

ليكن $M_{(a,b)}$ مصفوفة من E و $\gamma\in\mathbb{R}$

$$\gamma . M = \gamma \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma a & \gamma b \\ -2\gamma b & \gamma a+2\gamma b \end{pmatrix}$$

نضع: $\gamma a = \alpha$ و $\gamma b = \beta$

$$\gamma M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -2\beta & \alpha+2\beta \end{pmatrix} \in E \quad (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$$

ومنه E جزء مستقر في $(M_2(\mathbb{R}),\cdot)$

إذن: $(E,+,\cdot)$ فضاء جزئي من $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$

وبما أن $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ فضاء حقيقي

فإن: $(E,+,\cdot)$ فضاء حقيقي

لنحدد بعده

$M\in E$

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+2b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= aI + bJ.$$

ومنه (I,J) أسرة مولدة للفضاء $(E,+,\cdot)$

$$M = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a=0 \text{ و } b=0$$

ومنه: الأسرة (I,J) حرة.

وعليه: (I,J) أساس الفضاء الحقيقي $(E,+,\cdot)$

إذن: $\dim E = 2$

-2

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= -2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= -2I + 2J.$$

لنستنتج الجداء

$M(a,b) \times M(c,d)$

$$M(a,b)\times M(c,d) = (aI+bJ)\times(cI+dJ)$$

$$= acI + adJ + bcJ + bdJ^2$$

$$= acI + adJ + bcJ + 2bdJ - 2bdI$$

$$= (ac-2bd)I + (ad+bc+2bd)J.$$

3- أ- لنبين أن f تقابل

ليكن a و b من $\mathbb{R}$ و $M\in E$

نضع $z = x+yi$ $\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$f(M(a,b)) = z \Rightarrow (a+b)+bi = x+yi$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b = x \\ b = y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = x-y \\ b = y. \end{cases}$$

ومنه:

$$(\forall z\in\mathbb{C})\ (\exists!\ M(a,b)\in E)\ /\ f(M(a,b)) = z$$

إذن: f تقابل من E نحو $\mathbb{C}$.

التقابل العكسي

$$f^{-1}: \mathbb{C} \longrightarrow E$$

$$z = x+yi \longrightarrow M(x-y,\ y)$$

ب- لنبين أن f تشاكل من $(E,\times)$ نحو $(\mathbb{C},\times)$

$M(a,b)$ و $M(c,d)$ عنصرين من E

$$f(M(a,b)\times M(c,d)) = f(M(ac-2bd,\ ad+bc+2bd))$$

$$= (ac+ad+bc) + (ad+bc+2bd)i$$

ومن جهة أخرى :

$f(M(a,b)) \times f(M(c,d)) = ((a+b)+bi)((c+d)+di)$

$= ac+ad+bc+bd+(a+b)di+(c+d)bi - bd$

$= (ac+ad+bc)+(ad+bc+2bd)i$

$= f(M(a,b) \times M(c,d))$

ومنه : f تشاكل من $(E,\times)$ نحو $(\mathbb{C},\times)$

ج. لنستنتج بنية $(E,+,\times)$

لدينا : $(E,+)$ زمرة تبادلية.

f تشاكل تقابلي من $(E,\times)$ نحو $(\mathbb{C},\times)$

و $f^{-1}(\mathbb{C}^*) = E^*$

لدينا : $(\mathbb{C}^*,\times)$ زمرة تبادلية.

إذن : $(E^*,\times)$ زمرة تبادلية.

و من خلال السؤال 2 E جزء مستقر في $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

لدينا : $\times$ توزيعي على $+$ في $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

ومنه $\times$ توزيعي على $+$ في E.

نستنتج أن : $(E,+,\times)$ جسم تبادلي.

د. لنحدد في E حلول المعادلة $M^3 - I + J = 0$ حيث M المصفوفة المجهولة من $M_2(\mathbb{R})$

$M^3 - I + J = 0 \Rightarrow f(M^3) = f(I-J)$

$\Rightarrow (f(M))^3 = -i$

$\Rightarrow ((a+b)+bi)^3 = -i$

نضع $z = x+yi$ ، $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$z^3 = -i \Rightarrow z^3 - i^3 = 0$

$\Rightarrow (z+i)(z^2+zi-1)=0$

$\Rightarrow z = -i$ أو $z^2+zi-1=0$

$\Delta = 3 = (\sqrt{3})^2$

$z = \frac{-i-\sqrt{3}}{2}$ أو $z = \frac{-i+\sqrt{3}}{2}$

لدينا : $z=(a+b)+bi$

$\begin{cases} b=-1 \\ a=1 \end{cases}$ أو $\begin{cases} b=-\frac{1}{2} \\ a+b=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ أو $\begin{cases} b=-\frac{1}{2} \\ a+b=\frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

ومنه حلول المعادلة هي :

$S = \left\{ M(1,-1) ; M\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}, -\frac{1}{2}\right) ; M\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \right\}$

التمرين ③

الجزء I :

$f(x) = \frac{x-1}{x\ln x}$ ، $x \neq 1$ و $f(1)=1$

1. لنبين أن الدالة متصلة في D

$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{\frac{\ln(x)}{x-1}}\right) \times \frac{1}{x}$

$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = 1$

$\lim_{x\to 1} f(x) = 1 = f(1) \quad \left(\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1\right)$

ومنه f متصلة في 1

و لدينا

$x \mapsto x\ln x$ متصلة في $D-\{1\}$

وغير منعدمة على هذا المجال

$x \mapsto x-1$ متصلة على $D-\{1\}$

ومنه

$x \mapsto \frac{x-1}{x\ln x}$ متصلة على $D-\{1\}$.

ومتصلة في 1

ومنه : الدالة f متصلة على D

2. أ. بين

$(\forall x\in D-\{1\}) \quad f'(x) = \frac{\ln x - x + 1}{(x\ln x)^2}$

$f'(x) = \frac{x\ln x - (\ln x + 1)(x-1)}{(x\ln x)^2}$

$f'(x) = \frac{\ln x - x + 1}{(x\ln x)^2} \quad (\forall x\in D-\{1\})$

ب- لنبين أن الدالة f تناقصية على D

نضع

$g(x) = \ln x - x + 1$

$g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

③

ومنه: $\forall x\in D-\{1\},\ g(x)<0$

ومنه: $f'(x)<0 \quad \forall x\in D-\{1\}$

وعليه f تناقصية على D.

الجزء (2):

1) أ- $\forall x\in]0,1[$

$$\int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln(t)}dt=\left[\ln|\ln(t)|\right]_x^{x^2}$$
$$=\ln|\ln(x^2)|-\ln|\ln(x)|$$
$$=\ln\left(\left|\frac{2\ln(x)}{\ln(x)}\right|\right)$$
$$=\ln(2)$$

وعليه

$$\int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln(t)}dt=\ln(2)\quad(\forall x\in]0,1[)$$

ب- لنبين أن: $(\forall x\in]0,1[)$

$$(x^2-1)\ln(2)\leq F(x)\leq(x-1)\ln(2)$$

لدينا: $x^2<x \quad \forall x\in]0,1[$

ومنه $x^2\leq t\leq x\Rightarrow x^2-1\leq t-1\leq x-1$

$$\Rightarrow\frac{(x-1)}{t\ln(t)}\leq\frac{t-1}{t\ln(t)}\leq\frac{x^2-1}{t\ln(t)}$$

$(x^2<x)\quad\forall t\in]0,1[\quad\left(\frac{1}{t\ln(t)}<0\right)$

$$(x^2-1)\int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln t}dt\leq F(x)\leq(x-1)\int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln(t)}dt$$

$$(x^2-1)\ln(2)\leq F(x)\leq(x-1)\ln(2)$$
$(\forall x\in]0,1[)$

ج- لندرس اتصال الدالة F على يمين 0

$$\lim_{x\to0^+}(x^2-1)\ln(2)=\lim_{x\to0^+}(x-1)\ln(2)=-\ln(2)$$

ومنه

$$\lim_{x\to0^+}F(x)=-\ln(2)=F(0)$$

ومنه: F متصلة على يمين 0.

لندرس اتصال الدالة على يسار 1.

$$\lim_{x\to1^-}(x^2-1)\ln(2)=\lim_{x\to1^-}(x-1)\ln(2)=0$$

وعليه

$$\lim_{x\to1^-}F(x)=0=F(1)$$

ومنه: F متصلة على يسار 1

2) أ- لنبين أن: $(\forall x\in]0,1[)$

$$\frac{x^2-x}{2\ln x}\leq F(x)+\ln(2)\leq\frac{x^2-x}{\ln(x)}\quad\forall x\in]0,1[$$

$$F(x)+\ln(2)=\int_x^{x^2}\frac{t-1}{t\ln(t)}dt+\int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln(t)}dt$$
$$=\int_x^{x^2}\frac{t}{t\ln(t)}dt$$
$$=\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln(t)}dt$$

لدينا: $x^2<x\quad(\forall x\in]0,1[)$

$$x^2\leq t\leq x\Rightarrow2\ln(x)\leq\ln(t)\leq\ln(x)$$
$$\Rightarrow\frac{1}{\ln(x)}\leq\frac{1}{\ln(t)}\leq\frac{1}{2\ln(x)}$$
$$\Rightarrow\int_x^{x^2}\frac{1}{2\ln(x)}dt\leq\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln(t)}dt\leq\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln(x)}dt$$
$$\Rightarrow\frac{1}{2\ln(x)}[t]_x^{x^2}\leq F(x)+\ln(2)\leq\frac{1}{\ln(x)}[t]_x^{x^2}$$
$$\Rightarrow\frac{x^2-x}{2\ln(x)}\leq F(x)+\ln(2)\leq\frac{x^2-x}{\ln(x)}$$
$(\forall x\in]0,1[)$

ب- لندرس قابلية اشتقاق F على يمين 0

$$\frac{F(x)-F(0)}{x}=\frac{F(x)+\ln(2)}{x}$$
$\forall x\in]0,1[$

$$\frac{x-1}{2\ln(x)}\leq\frac{F(x)+\ln(2)}{x}\leq\frac{x-1}{\ln(x)}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x-1}{2\ln(x)}=\lim_{x\to0^+}\frac{x-1}{\ln(x)}=0$$

وعليه: $\lim_{x\to0^+}\frac{F(x)+\ln(2)}{x}=0\in\mathbb{R}$

إذن F قابلة للاشتقاق على يمين 0.

3) أ- لدينا $t\to f(t)$ متصلة على $[x,x^2]$ $(\forall x>1)$

وعليه $\exists c\in[x,x^2]\ /\ f(c)=\frac{1}{x^2-x}F(x)$

أي: $\exists c\in[x,x^2]\ /\ F(x)=(x^2-x)f(c)$

ب- $(\forall x>1)$

$$x\leq c\leq x^2\Rightarrow f(x^2)\leq f(c)\leq f(x)$$

(f تناقصية على $[x,x^2]$ ، $x^2>x$ ، $(\forall x>1)$)

وعليه

$$(x^2-x)f(x^2)\leq(x^2-x)f(c)\leq(x^2-x)f(x)$$

$(x^2-x)f(x^2) \leq F(x) \leq (x^2-x)f(x)$

$\lim\limits_{x \to 1^+} (x^2-x)f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x^2-x)f(x^2) = 0$

ومنه :

$\lim\limits_{x \to 1^+} F(x) = 0 = F(1)$

← إذن F متصلة على يمين النقطة 1

$$\frac{F(x)-F(1)}{x-1} = \frac{F(x)}{x-1}$$

$$x f(x^2) \leq \frac{F(x)}{x-1} \leq x f(x)$$

$$\lim\limits_{x \to 1^+} x f(x^2) = \lim\limits_{x \to 1^+} x f(x) = 1$$

وعليه

$$\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{F(x)-F(1)}{x-1} = 1 \in \mathbb{R}$$

← إذن F قابلة للاشتقاق على يمين النقطة 1

ج - لنبين أن : $F(x) \geq \ln x$.

لدينا

$$F(x) - \ln(x) = \int_x^{x^2} \frac{t-1}{t\ln(t)}dt - \int_x^{x^2} \frac{1}{t}dt$$

$$= \int_x^{x^2} \frac{t-1-\ln(t)}{t\ln(t)}dt$$

$$= \int_x^{x^2} \frac{-(\ln(t)-t+1)}{t\ln(t)}dt$$

لدينا (من خلال س 2 . ب @ج)

$-(\ln(t)-t+1) = -g(t) \geq 0 \quad \forall t \in [1,+\infty[$

و $t\ln(t) \geq 0$ ومنه

$$\int_x^{x^2} \frac{-(\ln(t)-t+1)}{t\ln(t)}dt \geq 0$$

أي :

$F(x) \geq \ln(x) \quad \forall x \in [1,+\infty[$

لنحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

حسب مصاديق التقارب

$\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$

4 - أ. لنبين أن F قابلة للاشتقاق على كل من $]0,1[$ و $]1,+\infty[$

$t \mapsto f(t)$ متصلة على كل من $]0,1[$ و $]1,+\infty[$

ومنه فهي تقبل دالة أصلية G بحيث،

$F(x) = G(x^2) - G(x)$.

$x \mapsto x^2$ قابلة للاشتقاق على $]0,1[$ و $]1,+\infty[$

و $f(]0,1[) \subset]0,1[$

$f(]1,+\infty[) \subset]1,+\infty[$

$x \mapsto G(x)$ قابلة للاشتقاق على $]0,1[\cup]1,+\infty[$

ومنه :

$x \xrightarrow{F} G \circ g(x)$ قابلة للاشتقاق على كل من $]0,1[$ و $]1,+\infty[$.

$$F'(x) = 2x\,G'(x^2) - G'(x)$$

$$= 2x\,f(x^2) - f(x)$$

$$= 2x\left(\frac{x^2-1}{2x^2\ln(x)}\right) - \left(\frac{x-1}{x\ln(x)}\right)$$

$$= \frac{x^2-x}{x\ln(x)}$$

$$= \frac{x-1}{\ln(x)}$$

$\frac{x-1}{\ln(x)} > 0 \qquad \forall x \in (]0,1[\cup]1,+\infty[)$

وعليه F تزايدية قطعا على $[0,+\infty[$.

جدول التغيرات .

x	0		1		$+\infty$
$F'(x)$	‖	$+$	‖	$+$	
$F(x)$	$-\ln(2)$	↗	0	↗	$+\infty$

من إنجاز التلميذة : أمينة مامو

تحت إشراف الأستاذ :

الحسانتي بوشعيب .