مستوى الجذع مشترك علمي وتكنولوجي

مذكرة رقم 8 : درس: المعادلات و المتراجحات و النظمات مع تمارين وأمثلة محلولة

الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
- المعادلات والمتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد؛ - المعادلات والمتراجحات من الدرجة الثانية بمجهول واحد؛ . الشكل القانوني لثلاثية الحدود؛ . المعادلة من الدرجة الثانية بمجهول واحد؛ - إشارة ثلاثية الحدود؛ - المتراجحات من الدرجة الثانية بمجهول واحد؛ - النظمات؛ . المعادلات من الدرجة الأولى بمجهولين؛ . نظمة معادلتين من الدرجة الأولى	- حل معادلات ومتراجحات تؤول في حلها إلى معادلات ومتراجحات من الدرجة الأولى أو الثانية بمجهول واحد. - حل نظمات من الدرجة الأولى بمجهولين باستعمال مختلف الطرائق (التأليفة الخطية، التعويض، المحددة). - تربيض وضعيات تتضمن مقادير متغيرة باستعمال تعابير أو معادلات أو متراجحات أو متفاوتات أو نظمات. - التمثيل المبياني لحلول متراجحات أو نظمات متراجحات من الدرجة الأولى بمجهولين واستعماله في تجويه المستوى وحل مسائل بسيطة حول البرمجة الخطية.	- إن تقنيات حل المعادلات والمتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد قد سبقت دراستها بالتعليم الثانوي الإعدادي لذا فإنه ينبغي تدعيم هذه الممارسة بحل ومناقشة أمثلة بسيطة توظف القيمة المطلقة أو معادلات بارامترية بسيطة وهادفة لتنمية قدرة التلاميذ على الاستدلال بفصل الحالات. - ينبغي تعويد التلاميذ على حل بعض المعادلات من الدرجة الثانية دون اللجوء إلى المميز (جذور بديهية، استعمال إحدى تقنيات التعميل، ...). - تعتبر المعادلات والمتراجحات البارامترية من الدرجة الثانية خارج المقرر. - ينبغي إدراج مسائل مستقاة من الحياة المعاشة أو من مواد دراسية أخرى بهدف تعويد التلاميذ على تربيض

I. المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد (تذكير)

تعريف: ليكن a و b عددين حقيقيين.
كل معادلة على الشكل $ax+b=0$ تسمى معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد, حيث x هو المجهول.

أمثلة : حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

1) $-2x+22=0$ 2) $3(2x+5)=6x-1$

3) $4(x-2)=6x-2(x+4)$ 4) $9x^2-16=0$

5) $\frac{(x-7)(x+3)}{x^2-9}=0$

الأجوبة: 1) $-2x+22=0$ يعني $-2x+22-22=-22$

يعني $-2x=-22$

يعني $-2x\times\left(\frac{1}{-2}\right)=-22\times\left(\frac{1}{-2}\right)$

يعني $x=11$ ومنه: $S=\{11\}$ وتسمى مجموعة حلول المعادلة

2) $3(2x+5)=6x-1$ يعني $6x+15=6x-1$

يعني $6x-6x=-1-15$ يعني $0x=-16$ يعني $0=-16$

وهذا غيرممكن ومنه : $S=\varnothing$

3) $4(x-2)=6x-2(x+4)$ يعني $4x-8=6x-2x-8$

يعني $4x-4x+8-8=0$ يعني $0=0$

ومنه :كل عدد حقيقي هو حل لهذه المعادلة وبالتالي : $S=\mathbb{R}$

4)أمامنا معادلة من الدرجة الثانية

طريقة 1: (التعميل) $9x^2-16=0$ يعني $(3x)^2-4^2=0$

يعني $(3x-4)(3x+4)=0$ يعني $3x+4=0$ أو $3x-4=0$

يعني $3x=-4$ أو $3x=4$ يعني $x=\frac{-4}{3}$ أو $x=\frac{4}{3}$

ومنه : $S=\left\{-\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right\}$

طريقة 2: $9x^2-16=0$ يعني $9x^2=16$ يعني $x^2=\frac{16}{9}$

يعني $x=\sqrt{\frac{16}{9}}$ أو, $x=\sqrt{\frac{16}{9}}$ يعني $x=\frac{4}{3}$ أو, $x=-\frac{4}{3}$

5) $\frac{(x-7)(x+3)}{x^2-9}=0$ هناك مرحلتين لحل مثل هذه المعادلات

المرحلة1: نحدد أولا مجموعة تعريف المعادلة

المعادلة لها معنى يعني $x^2-9\neq0$

$x^2-9=0$ يعني $x^2-3^2=0$ يعني $(x-3)(x+3)=0$

يعني $x+3=0$ أو $x-3=0$ يعني $x=-3$ أو $x=3$

ومنه: $D_E=\mathbb{R}-\{-3,3\}$

المرحلة2: الحل الفعلي للمعادلة : $\frac{(x-7)(x+3)}{x^2-9}=0$ يعني

$(x-7)(x+3)=0$ يعني $x-7=0$ أو $x+3=0$

يعني $x=7\in D_E$ أو $x=-3\notin D_E$ ومنه: $S=\{7\}$

تمرين 1 : حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

1) $\frac{x+1}{2}+4=\frac{2x-5}{10}+\frac{2(x+10)}{5}$

2) $x^3-7x=0$

3) $(5x-7)^2-(5x-7)(2x+3)=0$

4) $\frac{(x-1)(x+2)}{x^2-16}=0$

5) $\frac{x+1}{x+2}=\frac{x-5}{x-2}$

الجواب: 1) $\frac{x+1}{2}+4=\frac{2x-5}{10}+\frac{2(x+10)}{5}$ (نوحد المقامات)

يعني $\frac{5x+5}{10}+\frac{40}{10}=\frac{2x-5}{10}+\frac{4x+40}{10}$

يعني $\frac{5x+5+40}{10}=\frac{2x-5+4x+40}{10}$

يعني $5x+5+40=2x-5+4x+40$ يعني $-x=-10$

يعني $x=10$ ومنه: $S=\{10\}$

2) $x^3-7x=0$ يعني $x(x^2-7)=0$ (التعميل)

يعني $x=0$ أو $x^2-7=0$ يعني $x=0$ أو $x^2=7$

يعني $x=0$ أو $x=\sqrt{7}$ أو $x=-\sqrt{7}$ ومنه: $S=\{-\sqrt{7},0,\sqrt{7}\}$

3) $(5x-7)^2-(5x-7)(2x+3)=0$

يعني $(5x-7)[(5x-7)-(2x+3)]=0$

يعني $(5x-7)(3x-10)=0$ يعني $5x-7=0$ أو $3x-10=0$

يعني $x=\frac{7}{5}$ أو $x=\frac{10}{3}$ ومنه: $S=\left\{\frac{7}{5},\frac{10}{3}\right\}$

4) $\frac{(x-1)(x+2)}{x^2-16}=0$

هناك مرحلتين لحل مثل هذه المعادلات

المرحلة1:نحدد أولا مجموعة تعريف المعادلة

المعادلة لها معنى يعني $x^2-16\neq 0$

$x^2-16=0$ يعني $x^2-4^2=0$ يعني $(x-4)(x+4)=0$

يعني $x+4=0$ أو $x-4=0$ يعني $x=-4$ أو $x=4$

ومنه: $D_E=\mathbb{R}-\{-4,4\}$

المرحلة2: الحل الفعلي للمعادلة

$\frac{(x-1)(x+2)}{x^2-16}=0$ يعني $(x-1)(x+2)=0$ يعني $x-1=0$ أو $x+2=0$

يعني $x=1\in D_E$ أو $x=-2\in D_E$ ومنه : $S=\{-2,1\}$

5) $\frac{x+1}{x+2}=\frac{x-5}{x-2}$

هناك مرحلتين لحل مثل هذه المعادلات

المرحلة1:نحدد أولا مجموعة تعريف المعادلة

المعادلة لها معنى يعني $x+2\neq 0$ و $x-2\neq 0$

يعني $x\neq 2$ و $x\neq -2$

ومنه: $D_E=\mathbb{R}-\{-2,2\}$

المرحلة2: الحل الفعلي للمعادلة : $\frac{x+1}{x+2}=\frac{x-5}{x-2}$ يعني

$(x+1)(x-2)=(x-5)(x+2)$

يعني $x^2-2x+x-2=x^2-5x+2x-10$

يعني $-x+3x=-10+2$ يعني $2x=-8$ يعني $x=-4\in D_E$

ومنه : $S=\{-4\}$

II.المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد (تذكير):

1. **تعريف:** ليكن a و b عددين حقيقيين كل متراجحة على الشكل $ax+b\geq 0$ أو $ax+b\succ 0$ أو $ax+b\leq 0$ أو $ax+b\prec 0$ تسمى متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد حيث x هو المجهول.

2. **إشارة الحدانية $ax+b$:**

نلخص الجدولين في الجدول التالي:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	عكس إشارة a	0	إشارة a

مثال 1: لنحدد إشارة $2x+1$

$2x+1=0$ يكافئ $x=-\frac{1}{2}$

و بما أن $a=2$ و $a\succ 0$ جدول إشارة $2x+1$ هو كالتالي:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x+1$	$-$	0	$+$

مثال 2: لنحدد إشارة $-x+2$

$-x+2=0$ يكافئ $x=2$

و بما أن: $a=-1$ و $a\prec 0$ فان جدول إشارة $-x+2$ هو كالتالي:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$-x+2$	$-$	0	$+$

مثال 3: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة التالية : $3x+6\geq 0$

$3x+6=0$ يكافئ $x=-2$

و بما أن: $3x+6\geq 0$ و $a>0$ فان جدول الإشارة هو كالتالي:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$3x+6$	$-$	0	$+$

و منه فان : $S=[-2;+\infty[$

تمرين 2 : حل في مجموعة الأعداد الحقيقية المتراجحات التالية:

1) $-2x+12>0$ 2) $5x-15\leq 0$

3) $4x^2-9\geq 0$ 4) $(1-x)(2x+4)>0$

5) $\frac{5x-2}{1+3x}\geq 0$ 6) $\frac{(2x+1)(5x-10)}{2x-6}\leq 0$

الأجوبة: 1) $-2x+12>0$

$-2x+12=0$ يكافئ $x=6$

و بما أن: $a=-2$ و $a<0$ فان جدول الإشارة هو كالتالي:

x	$-\infty$	6	$+\infty$
$-2x+12$	$+$	0	$-$

و منه فان : $S=]-\infty;6[$

2) $5x-15\leq 0$

$5x-15=0$ يكافئ $x=3$

و بما أن: $a=5$ و $a>0$ فان جدول الإشارة هو كالتالي:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$5x-15=0$	$-$	0	$+$

و منه فان : $S=]-\infty;3[$

3) $4x^2-9\geq 0$

$4x^2-9=0$ يعني $(2x)^2-3^2=0$ يعني $(2x-3)(2x+3)=0$

يعني $2x+3=0$ أو $2x-3=0$ يعني $x=\frac{-3}{2}$ أو $x=\frac{3}{2}$

الطريقة : في جدول نعطي إشارة كل عامل على الشكل $ax+b$ ثم استنتج إشارة الجداء أو الخارج مع ترتيب تزايدي للقيم التي ينعدم فيها كل عامل.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$(2x-3)(2x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

و منه فان : $S=\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]\cup\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

4) $(1-x)(2x+4)>0$

$(1-x)(2x+4)=0$ يعني $2x+4=0$ أو $1-x=0$ يعني

$x=-2$ أو $x=1$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$2x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(1-x)(2x+4)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

و منه فان : $S=]-2;1[$

5) $\frac{5x-2}{1+3x}\geq 0$ المرحلة1:نحدد أولا مجموعة تعريف المتراجحة

المتراجحة لها معنى يعني $1+3x\neq 0$ يعني $x\neq -\frac{1}{3}$

ومنه: $D_I=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{3}\right\}$

المرحلة2: الحل الفعلي للمتراجحة

$5x-2=0$ **يعني** $x=\frac{2}{5}$

$1+3x=0$ **يعني** $x=-\frac{1}{3}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
$1+3x$		$-$	0	$+$		$+$	
$5x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{5x-2}{1+3x}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

و منه فان : $S=\left]-\infty;-\frac{1}{3}\right[\cup\left[\frac{2}{5};+\infty\right[$

6) $\frac{(2x+1)(5x-10)}{2x-6}\le 0$

<u>المرحلة1:</u>نحدد أولا مجموعة تعريف المتراجحة

المتراجحة لها معنى يعني $2x-6\neq 0$ **يعني** $x\neq 3$

ومنه: $D_I=\mathbb{R}-\{3\}$

<u>المرحلة2:</u> الحل الفعلي للمتراجحة

$5x-10=0$ **يعني** **يعني** $x=2$

$2x+1=0$ **يعني** $x=-\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		3		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$5x-10$		$-$			$0\ -\ +$			$+$	
$2x-6$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{(2x+1)(5x-10)}{2x-6}$		$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$+$	

و منه فان : $S=\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup[2;3[$

III. المعادلات من الدرجة الثانية بمجهول واحد:

1. **تعريف:** المعادلة $ax^2+bx+c=0$ حيث x هو المجهول أعداد حقيقية معلومة $(a\neq 0)$ تسمى معادلة من الدرجة الثانية بمجهول واحد.

مثال 1: العدد -1 حل للمعادلة $3x^2+5x+2=0$

لأن: $3(-1)^2+5(-1)+2=0$

مثال 2: العدد $\sqrt{3}$ حل للمعادلة $x^2+\left(1-\sqrt{3}\right)x-\sqrt{3}=0$

لأن: $\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(1-\sqrt{3}\right)\sqrt{3}-\sqrt{3}=3+\sqrt{3}-3-\sqrt{3}=0$

ملاحظة : كل عدد حقيقي x_0 يحقق المتساوية $ax^2+bx+c=0$ هو حل للمعادلة $ax^2+bx+c=0$ و يسمى جذر للحدودية ax^2+bx+c.

2. **الشكل القانوني لثلاثية الحدود ax^2+bx+c.**

خاصية: a و b و c ثلاثة أعداد حقيقية, و a غير منعدم.

لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$

الكتابة $a\left(\left(x+\frac{b^2}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$ تسمى الشكل القانوني لثلاثية الحدود ax^2+bx+c.

مثال : نعتبر الحدودية $P(x)=2x^2+5x+2$.

لدينا $P(x)=2\left(\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{9}{16}\right)$ و بالتالي $2\left(\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{9}{16}\right)$ هو الشكل القانوني لثلاثية الحدود $2x^2+5x+2$.

3)حل معادلة من الدرجة الثانية بمجهول واحد:

تعريف:لتكن ثلاثية الحدود $P(x)=ax^2+bx+c$.

العدد الحقيقي b^2-4ac يسمى مميز ثلاثية الحدود أو مميز المعادلة $ax^2+bx+c=0$ و نرمز له بالرمز Δ.

مثال: نعتبر المعادلة نحسب مميز المعادلة (E)

لدينا: $a=3$ و $b=-5$ و $c=7$ بما أن: $\Delta=b^2-4ac$

فان: $\Delta=(-5)^2-4\times7\times3=25-84=-59$

ملاحظة : الرمز Δ يقرأ: دلتا delta.

<u>**تمرين 3 :**</u> الشكل القانوني لثلاثية الحدود:

لنحدد الشكل القانوني لثلاثية الحدود : $2x^2+6x+15$

لدينا: $2x^2+6x+15=2\left(\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{-21}{4}\right)$

$=2\left(\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{21}{4}\right)$

خاصية:نعتبر المعادلة $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ و ليكن Δ مميزها.

✓**إذا كان** $\Delta\prec0$ **فان** المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$.

✓**إذا كان** $\Delta=0$ **فان** المعادلة تقبل حلا وحيدا هو: $-\frac{b}{2a}$

✓**إذا كان** $\Delta\succ0$ فان المعادلة تقبل حلين مختلفين هما : $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

نرمز لمجموعة حلول المعادلة بالرمز S.

<u>**مثال1:**</u>المعادلة $3x^2+x+2=0$ ليس لها حلا في $\mathbb{R}$

لأن $\Delta\prec0$ $(\Delta=1-4\times3\times2=-23)$ و بالتالي مجموعة حلولها ي $S=\phi$.

<u>**مثال 2:**</u>المعادلة $x^2-10x+25=0$ لها حل وحيد

لأن $\Delta=0$ $(\Delta=10^2-4\times25=0)$.

حل هذه المعادلة هو: $-\frac{b}{2a}=5$ و بالتالي مجموعة حلولها هي $S=\{5\}$.

<u>**مثال 3:**</u>نعتبر المعادلة $x^2-3x+2=0$ لدينا $\Delta=9-4\times2=1$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{3-1}{2}=1$ و $x_2=\frac{3+1}{2}=2$ و منه $S=\{1;2\}$.

<u>**تمرين 4**</u> : حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

1) $6x^2-7x-5=0$ 2) $2x^2-2\sqrt{2}x+1=0$

3) $3x^2+x+2=0$ 4) $4x^2-8x+3=0$

5) $x^2-4x+2=0$ 6) $x^2+5x+7=0$

7) $2x^2-4x+6=0$ 8) $x^2-4x-21=0$

9) $3x^2-6x+3=0$

الأجوبة:1) $6x^2-7x-5=0$ $a=6$ و $b=-7$ و $c=-5$

$\Delta=b^2-4ac=(-7)^2-4\times6\times(-5)=49+120=169=(13)^2>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ **و** $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ يعني $x_1=\frac{-(-7)+\sqrt{169}}{2\times6}=\frac{7+13}{12}=\frac{20}{12}=\frac{5}{3}$

$x_2=\frac{7-13}{12}=\frac{6}{12}=-\frac{1}{2}$ ومنه: $S=\left\{\frac{5}{3},-\frac{1}{2}\right\}$

2) $2x^2-2\sqrt{2}x+1=0$ ؛ $a=2$ و $b=-2\sqrt{2}$ و $c=1$

$\Delta=b^2-4ac=\left(-2\sqrt{2}\right)^2-4\times2\times1=8-8=0$

بما أن $\Delta=0$ فان هذه المعادلة تقبل **حلا وحيدا هو:**

$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-\left(-2\sqrt{2}\right)}{2\times2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ومنه: $S=\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

3) $3x^2+x+2=0$ ؛ $a=3$ و $b=1$ و $c=2$

$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\times3\times2=1-24=-23<0$

بما أن $\Delta\prec0$ **فان** المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$ ومنه: $S=\varnothing$

4) $4x^2-8x+3=0$ ؛ $a=4$ و $b=-8$ و $c=3$

$\Delta=b^2-4ac=(-8)^2-4\times3\times(4)=84-8=16=(4)^2>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-(-8)+\sqrt{16}}{2\times4}$ **و** $x_2=\frac{-(-8)-\sqrt{16}}{2\times4}$

$x_1=\frac{8+4}{8}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$ **و** $x_2=\frac{8-4}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ ومنه: $S=\left\{\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\}$

5) $x^2-4x+2=0$ ؛ $a=1$ و $b=-4$ و $c=2$

$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times2\times(1)=16-8=8>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-(-4)+\sqrt{8}}{2\times1}$ **و** $x_2=\frac{-(-4)-\sqrt{8}}{2\times1}$ ومنه: $x_1=\frac{4+2\sqrt{2}}{2}=\frac{2\left(2+\sqrt{2}\right)}{2}=2+\sqrt{2}$

$x_2=\frac{4-2\sqrt{2}}{2}=\frac{2\left(2-\sqrt{2}\right)}{2}=2-\sqrt{2}$ ومنه: $S=\left\{2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}\right\}$

6) $x^2+5x+7=0$ ؛ $a=1$ و $b=5$ و $c=7$

$\Delta=b^2-4ac=5^2-4\times1\times7=25-28=-3<0$

بما أن $\Delta\prec0$ **فان المعادلة ليس لها حل في** $\mathbb{R}$ ومنه: $S=\varnothing$

7) $2x^2-4x+6=0$ ؛ $a=2$ و $b=-4$ و $c=6$

$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times2\times6=16-48=-32<0$

بما أن $\Delta\prec0$ **فان المعادلة ليس لها حل في** $\mathbb{R}$ ومنه: $S=\varnothing$

8) $x^2-4x-21=0$ ؛ $a=1$ و $b=-4$ و $c=-21$

$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times1\times(-21)=16+84=100=(10)^2>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-(-4)+\sqrt{100}}{2\times1}$ و $x_2=\frac{-(-4)-\sqrt{100}}{2\times1}$

$x_1=\frac{4+10}{2}=\frac{14}{2}=7$ و $x_2=\frac{4-10}{2}=\frac{-6}{2}=-3$ ومنه: $S=\{-3,7\}$

9) $3x^2-6x+3=0$ ؛ $a=3$ و $b=-6$ و $c=3$

$\Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4\times3\times3=36-36=0$

بما أن $\Delta=0$ فان هذه المعادلة تقبل حلا وحيدا مزدوجا هو :

$x=\frac{-b}{2a}$ يعني $x=\frac{-(-6)}{2\times3}=\frac{6}{6}=1$ ومنه: $S=\{1\}$

4) مجموع و جداء حلي معادلة من الدرجة الثانية:

نشاط: نعتبر المعادلة $ax^2+bx+c=0$ حيث $(a\neq0)$ و $\Delta>0$

و x_1 و x_2 حلي المعادلة بين أن: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ و $x_1\times x_2=\frac{c}{a}$

خاصية: إذا كان للمعادلة $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ حلان x_1 و x_2 فإنهما يحققان المتساويتين $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ و $x_1\times x_2=\frac{c}{a}$.

مثال : نعتبر المعادلة $(E)\,20015x^2-2016x+1=0$

بين أن العدد 1 حل للمعادلة (E) ثم حدد الحل الثاني.

الأجوبة: نعوض x ب 1 في المعادلة (E) فنجد :

$2015\times1^2-2016\times1+1=2016-2016=0$ ومنه 1 حل ل (E)

حسب الخاصية السابقة لدينا : $x_1\times x_2=\frac{1}{2015}$ ولدينا $x_1=1$

اذن : $1\times x_2=\frac{1}{2015}$ يعني $x_2=\frac{1}{2015}$

تمرين 5: نعتبر المعادلة : $(E):\ -2x^2+\sqrt{2}x+2=0$

1. بين أن المعادلة (E) تقبل حلين مختلفين α و β بدون حسابهما
2. استنتج قيم ما يلي: $\alpha+\beta$ و $\alpha\times\beta$ و $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ و $\alpha^2+\beta^2$ و $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$ و $\alpha^3+\beta^3$

الأجوبة: 1) $-2x^2+\sqrt{2}x+2=0$ اذن: $a=-2$ و $b=\sqrt{2}$ و $c=2$

$\Delta=b^2-4ac=\left(\sqrt{2}\right)^2-4\times2\times(-2)=2+16=18>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين : α و β

2) حسب خاصية لدينا : $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ و $\alpha\times\beta=\frac{c}{a}$

ومنه : $\alpha+\beta=-\frac{\sqrt{2}}{-2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\alpha\times\beta=\frac{2}{-2}=-1$

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-1}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

و لدينا : $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ يعني $(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\alpha^2+\beta^2$

يعني $\alpha^2+\beta^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-2(-1)$ يعني $\alpha^2+\beta^2=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$

ولدينا : $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha\beta}$ اذن : $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\frac{5}{2}}{-1}=-\frac{5}{2}$

ونعلم أن : $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

يعني $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2$

يعني $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

اذن : $\alpha^3+\beta^3=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3-3(-1)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

يعني $\alpha^3+\beta^3=\frac{\sqrt{2}^3}{2^3}+\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{8}+\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}+12\sqrt{2}}{8}=\frac{14\sqrt{2}}{8}=\frac{7\sqrt{2}}{4}$

IV. تعميل و إشارة ثلاثية الحدود ax^2+bx+c:

1. تعميل ثلاثية الحدود ax^2+bx+c:

خاصية: نعتبر ثلاثية الحدود ax^2+bx+c و ليكن Δ مميزها.

1. إذا كان: $\Delta\succ0$ فان المعادلة $ax^2+bx+c=0$ تقبل حلين مختلفين x_1 و x_2 و لدينا: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$
2. إذا كان: $\Delta=0$ فان: $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$

3. إذا كان: $\Delta \prec 0$ فان: ax^2+bx+c لا يمكن تعميلها إلى حدوديتين من الدرجة الأولى.

مثال: نعتبر الحدودية $R(x)=6x^2-x-1$ مميز الحدودية $R(x)$ هو $\Delta=1+24=25$.

إذن جذرا الحدودية: هما $x_1=\frac{1+5}{12}=\frac{1}{2}$ و $x_2=\frac{1-5}{12}=-\frac{1}{3}$

و بالتالي: $R(x)=6\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)$

تمرين 6 : عمل ثلاثيات الحدود التالية :

1) $x^2-10x+25$ 2) x^2-3x+2 3) $3x^2+x+2$

أجوبة : 1) $x^2-10x+25$: $a=1$ و $b=-10$ و $c=25$

$\Delta=b^2-4ac=(-10)^2-4\times1\times(25)=100-100=0$

بما أن $\Delta=0$ فان هذه الحدودية لها جذر وحيد هو:

$x_1=\frac{-(-10)}{2\times1}=\frac{10}{2}=5$

ومنه التعميل : $x^2-10x+25=a(x-x_1)^2=1(x-5)^2$

2) x^2-3x+2 $a=1$ و $b=-3$ و $c=2$

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times1\times2=9-8=1=(1)^2>0$

بما أن $\Delta \succ 0$ فان هذه الحدودية لها جذرين هما:

$x_1=\frac{3+\sqrt{1}}{2\times1}$ و $x_1=\frac{3-\sqrt{1}}{2\times1}$ يعني $x_1=2$ و $x_2=1$

ومنه التعميل :

$x^2-3x-2=a(x-x_1)(x-x_2)=1(x-2)(x-1)$

3) $3x^2+x+2$ لدينا:

$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\times3\times2=1-24=-23<0$

ومنه فان هذه الحدودية لا يمكن تعميلها

تمرين 7 : عمل ثلاثيات الحدود التالية :

1) $2x^2-4x+6$ 2) $4x^2-8x+3$ 3) $3x^2-6x+3$

أجوبة : 1) $2x^2-4x+6=0$: $a=2$ و $b=-4$ و $c=6$

$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times2\times(6)=16-48=32<0$

ومنه فان هذه الحدودية لا يمكن تعميلها

2) $4x^2-8x+3=0$ $a=4$ و $b=-8$ و $c=3$

$\Delta=b^2-4ac=(-8)^2-4\times4\times3=64-48=16=(4)^2>0$

بما أن $\Delta \succ 0$ فان هذه الحدودية لها جذرين هما:

$x_1=\frac{8+4}{2\times4}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$ و $x_1=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

ومنه التعميل : $4x^2-8x+3=4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)=(4x-2)\left(x-\frac{3}{2}\right)$

3) $3x^2-6x+3$ بما أن $\Delta=0$ فان هذه الحدودية لها جذر وحيد هو: $x_1=\frac{-(-8)}{2\times4}=1$

ومنه التعميل : $3x^2-6x+3=a(x-x_1)^2=3(x-1)^2$

2. إشارة ثلاثية الحدود : ax^2+bx+c

الحالة1: إذا كان $\Delta \succ 0$ و x_1 و x_2 هما جذري ثلاثية الحدود فان:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$P(x)=ax^2+bx+c$		اشارة a	0	عكس اشارة a	0	اشارة a	

الحالة2: إذا كان $\Delta=0$: و x_1 هو الجذر الوحيد المزدوج فان:

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
$P(x)=ax^2+bx+c$		اشارةa	0	اشارةa	

الحالة3: إذا كان $\Delta \prec 0$ فان إشارة $P(x)$ هي إشارة العدد a فان:

x	$-\infty$		$+\infty$
$P(x)=ax^2+bx+c$		اشارة a	

مثال1:

1. أدرس إشارة الحدودية $P(x)=2x^2-3x+1$
2. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $2x^2-3x+1\geq0$

أجوبة: 1) $P(x)=2x^2-3x+1$ $a=2$

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times2\times1=9-8=1>0$

بما أن $\Delta \succ 0$ فان للحدودية جذرين هما:

$x_1=\frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times2}=\frac{3+1}{4}=1$ و $x_1=\frac{3-1}{4}=\frac{1}{2}$ ومنه:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$P(x)$		+	0	−	0	+	

2) حل المتراجحة : $S=\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty[$

مثال2:

1. أدرس إشارة الحدودية $P(x)=-2x^2+4x-2$
2. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $-2x^2+4x-2>0$

أجوبة: 1) $P(x)=-2x^2+4x-2$ $a=-2$

$\Delta=b^2-4ac=(4)^2-4\times(-2)\times(-2)=16-16=0$

بما أن $\Delta=0$ فان هذه الحدودية لها جذر وحيد هو:

$x_1=\frac{-(4)}{2\times(-2)}=1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$P(x)=-2x^2+4x-2$		−	0	−	

2) حل المتراجحة : $S=\mathbb{R}$

مثال3:

1. أدرس إشارة الحدودية $P(x)=3x^2+6x+5$
2. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $3x^2+6x+5<0$

أجوبة: 1) $P(x)=3x^2+6x+5$ $a=3>0$

$\Delta=b^2-4ac=(6)^2-4\times3\times5=36-60=-24<0$ ومنه:

x	$-\infty$		$+\infty$
$P(x)=3x^2+6x+5$		+	

2) حل المتراجحة : $S=\varnothing$

تمرين 8 : حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

1) $2x^2-4x+6\geq0$ 2) $4x^2-8x+3\leq0$ 3) $x^2-3x-10<0$

أجوبة: 1) $2x^2-4x+6\geq0$ $a=3>0$

$\Delta=b^2-4ac=16-48=-32<0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$P(x)=3x^2+6x+5$		+	

ومنه: $S=\mathbb{R}$

2) $4x^2-8x+3\le 0$ $\quad a=4$

$\Delta=b^2-4ac=(-8)^2-4\times4\times3=64-48=16>0$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان للحدودية جذرين هما:

$x_1=\frac{8+4}{2\times4}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$ و $x_1=\frac{8-4}{8}=\frac{1}{2}$ ومنه:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$4x^2-8x+3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S=\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$

3) $x^2-3x-10<0$ $\quad a=4$

$\Delta=b^2-4ac=49>0$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان للحدودية جذرين هما:

$x_1=5$ و $x_2=-2$ ومنه:

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$4x^2-8x+3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S=]-2,5[$

V. معادلات من الدرجة الأولى بمجهولين:

$\mathbb{R}^2$ هي مجموعة الأزواج (x,y) حيث $x\in\mathbb{R}$ و $y\in\mathbb{R}$.

مثال: نعتبر في المجموعة $\mathbb{R}^2$ المعادلة : $2x+3y=2$

1) تأكد أن الزوج $\left(0,\frac{2}{3}\right)$ حل للمعادلة: $2x+3y=2$

2) اعط ثلاث أزواج حلول للمعادلة: $2x+3y=2$

3) حل في $\mathbb{R}^2$ المعادلة : $2x+3y=2$

أجوبة: 1) $2\times0+3\times\frac{2}{3}=2$ اذن : $\left(0,\frac{2}{3}\right)$ حل للمعادلة

2) $x=2$ اذن : $2\times2+3\times y=2$ يعني : $y=-\frac{2}{3}$ اذن : $\left(2,-\frac{2}{3}\right)\in S$

$x=3$ اذن : $2\times3+3\times y=2$ يعني : $y=-\frac{4}{3}$ اذن : $\left(3,-\frac{4}{3}\right)\in S$

$x=4$ اذن : $2\times4+3\times y=2$ يعني : $y=-2$ اذن : $(4,-2)\in S$

3) $2x+3y=2$ يعني $3y=-2x+2$ يعني $y=\frac{-2x+2}{3}$

يعني $y=-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}$ اذن : $S=\left\{\left(x;\frac{-2}{3}x+\frac{2}{3}\right)/x\in\mathbb{R}\right\}$

تمرين 9 : حل في $\mathbb{R}^2$ المعادلات التالية :

1) $2x-8y+10=0$ $\quad$ 2) $-3x+12y-2=0$

3) $7x-14y+1=0$

أجوبة: 1) $2x-8y+10=0$ يعني $2y=8x-10$ يعني $y=\frac{8x-10}{2}$

يعني $y=4x-5$ اذن : $S=\{(x;4x-5)/x\in\mathbb{R}\}$

2) $-3x+12y-2=0$ يعني $12y=3x+2$ يعني $y=\frac{3x+2}{12}$

يعني $y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{6}$ اذن : $S=\left\{\left(x;\frac{1}{4}x+\frac{1}{6}\right)/x\in\mathbb{R}\right\}$

3) $7x-14y+1=0$ يعني $7x=14y-1$ يعني $x=\frac{14y-1}{7}$

يعني $x=2y-\frac{1}{7}$ اذن : $S=\left\{\left(2y-\frac{1}{7};y\right)/y\in\mathbb{R}\right\}$

تمرين 10 : نعتبر الحدودية $P(x)$ بحيث :

$P(x)=x^3-\sqrt{2}x^2-x+\sqrt{2}$

1. بين أن -1 هو جذر للحدودية $P(x)$
2. بين أن : $P(x)=(x+1)\left(x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}\right)$

نضع : $Q(x)=x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}$

3. Δ هو مميز ثلاثية الحدود $Q(x)$ تأكد أن $\Delta=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$
4. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $Q(x)=0$
5. استنتج حلول المعادلة : $x-\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{x}+\sqrt{2}=0$
6. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x)=0$
7. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $P(x)\le 0$

أجوبة: 1) $P(-1)=(-1)^3-\sqrt{2}(-1)^2-(-1)+\sqrt{2}$

$P(-1)=-1-\sqrt{2}+1+\sqrt{2}=0$

اذن -1 هو جذر للحدودية $P(x)$

2) $(x+1)\left(x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}\right)=x^3-\left(\sqrt{2}+1\right)x^2+\sqrt{2}x+x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}$

$=x^3-\left(\sqrt{2}+1\right)x^2+\sqrt{2}x+x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}$

$=x^3-\sqrt{2}x^2-x^2+\sqrt{2}x+x^2-\sqrt{2}x-x+\sqrt{2}$

$=x^3-\sqrt{2}x^2-x+\sqrt{2}$

3) $\Delta=b^2-4ac=\left(\sqrt{2}+1\right)^2-4\times1\times\sqrt{2}$

$\Delta=\left(\sqrt{2}\right)^2-2\sqrt{2}\times1+(1)^2=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$

4) $Q(x)=x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان للحدودية جذرين هما:

$x_1=\frac{\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1}{2\times1}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

$x_1=\frac{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1}{2\times1}=\frac{2}{2}=1$ $\qquad S=\left\{\sqrt{2},1\right\}$

5) $x-\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{x}+\sqrt{2}=0$

يمكن كتابتها على الشكل : $\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{x}+\sqrt{2}=0$

نضع: $X=\sqrt{x}$ والمعادلة تصبح على الشكل :

$X^2-\left(\sqrt{2}+1\right)X+\sqrt{2}=0$ حسب السؤال السابق : $X_1=\sqrt{2}$ أو $X_2=1$

يعني $\sqrt{x_1}=\sqrt{2}$ أو $\sqrt{x_2}=1$

يعني $\left(\sqrt{x_1}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$ أو $\left(\sqrt{x_2}\right)^2=(1)^2$

يعني $x_1=2$ أو $x_2=1$ $\qquad S=\{2,1\}$

6) $P(x)=0$ يعني $x+1=0$ أو $x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}=0$

يعني $x=-1$ أو $x_1=\sqrt{2}$ أو $x_1=1$ **ومنه:** $S=\left\{-1,1,\sqrt{2}\right\}$

7) $P(x)\le 0$ يعني $(x+1)\left(x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}\right)\le 0$

x	$-\infty$		-1		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$S=]-\infty,-1]\cup\left[1,\sqrt{2}\right]$

تمرين 11 : نعتبر المعادلة : $x^2+\left(2\sqrt3-\sqrt2\right)x-2\sqrt6=0$

1. نضع :
Δ هو مميز ثلاثية الحدود $P(x)$ تأكد أن $\Delta=14+4\sqrt6$
2. املأ الفراغات التالية :| $14+4\sqrt6=(...+...)^2$
3. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x)=0$
4. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $P(x)>0$
5. استنتج حلول المعادلة : $x+\left(2\sqrt3-\sqrt2\right)\sqrt x-2\sqrt6=0$

أجوبة: 1) $\Delta=b^2-4ac=\left(2\sqrt3+\sqrt2\right)^2-4\times1\times2\sqrt6$

$\Delta=\left(2\sqrt3\right)^2-2\times2\sqrt3\times\sqrt2+\left(\sqrt2\right)^2+8\sqrt6$ أي $\Delta=12-4\sqrt6+2+8\sqrt6=14+4\sqrt6$

2) $14+4\sqrt6=14+2\times2\sqrt3\times\sqrt2=\left(2\sqrt3\right)^2+2\times2\sqrt3\times\sqrt2+\left(\sqrt2\right)^2$

$14+4\sqrt6=\left(2\sqrt3+\sqrt2\right)^2$

3) $P(x)=x^2-\left(\sqrt2+1\right)x+\sqrt2$

بما أن $\Delta=14+4\sqrt6>0$ فان للمعادلة حلين هما:

$$x_1=\frac{-2\sqrt3+\sqrt2+\sqrt{14+4\sqrt6}}{2\times1}=\frac{-2\sqrt3+\sqrt2+\left|2\sqrt3+\sqrt2\right|}{2\times1}$$

$$x_1=\frac{-2\sqrt3+\sqrt2+2\sqrt3+\sqrt2}{2\times1}=\frac{2\sqrt2}{2}=\sqrt2$$

$$x_2=\frac{-2\sqrt3+\sqrt2-2\sqrt3-\sqrt2}{2\times1}=\frac{-4\sqrt3}{2}=-2\sqrt3 \qquad S=\left\{\sqrt2,-2\sqrt3\right\}$$

(4

x	$-\infty$		$-2\sqrt3$		$\sqrt2$		$+\infty$
$x^2+\left(2\sqrt3-\sqrt2\right)x-2\sqrt6$		+	0	−	0	+	

$S=\left]-\infty,-2\sqrt3\right[\cup\left]\sqrt2,+\infty\right[$

5) $x+\left(2\sqrt3-\sqrt2\right)\sqrt x-2\sqrt6=0$

يمكن كتابتها على الشكل : $\left(\sqrt x\right)^2+\left(2\sqrt3-\sqrt2\right)\sqrt x-2\sqrt6=0$

نضع : $X=\sqrt x$ والمعادلة تصبح على الشكل :

$X^2+\left(2\sqrt3-\sqrt2\right)X-2\sqrt6=0$

حسب السؤال السابق : $X_1=\sqrt2$ أو $X_2=-2\sqrt3$

يعني $\sqrt{x_1}=\sqrt2$ أو $\sqrt{x_2}=-2\sqrt3$

نلاحظ أن المعادلة : $\sqrt{x_2}=-2\sqrt3$ ليس لها حل لأن الجذر دائما موجب

ومنه $\left(\sqrt{x_1}\right)^2=\left(\sqrt2\right)^2$ يعني $x_1=2$ ومنه $S=\{2\}$

VI. نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين:

نعتبر النظمة: $(S):\begin{cases}ax+by=c\\ a'x+b'y=c'\end{cases}$ حيث a و b و a' و b' وc' أعداد حقيقية.هناك عدة طرق لحل نظمة سبق أن درست طريقتين هما طريقة التعويض و التأليفة الخطية طبعا هناك طريقة أخرى انتبه

1. طريقة التعويض :

مثال: حل في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ النظمة التالية : $\begin{cases}4x+y=10\\ -5x+2y=-19\end{cases}$

الجواب :نبحث عن y في المعادلة الأولى مثلا

$4x+y=10$ يعني $y=10-4x$

ونعوض y بقيمتها في المعادلة الثانية

$-5x+2y=-19$ يعني $-5x+2(10-4x)=-19$

يعني $-5x-8x=-19-20$ يعني $-13x=-39$ يعني $x=3$

ونعوض x ب 3 في المعادلة $y=10-4x$ فنجد $y=-2$

و منه: $S=\{(3,-2)\}$

2. طريقة التأليفة الخطية

مثال: حل في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ النظمة التالية : $\begin{cases}4x+y=10\\ -5x+2y=-19\end{cases}$

الجواب :نضرب المعادلة الأولى في العدد (-2) فنحصل على :

$\begin{cases}-8x-2y=-20\\ -5x+2y=-19\end{cases}$ وبجمع المعادلتين طرف لطرف نجد:

$-8x-2y-5x+2y=-20-19$ يعني $-13x=-39$ يعني $x=3$

ونعوض x ب 3 في المعادلة $4x+y=10$ فنجد $y=-2$

و منه: $S=\{(3,-2)\}$

3. طريقة المحددة :

تعريف و خاصية: العدد الحقيقي $ab'-a'b$ يسمى محددة النظمة (S) و نكتب: $\Delta=\begin{vmatrix}a & b\\ a' & b'\end{vmatrix}$

- إذا كان $\Delta=0$ فان النظمة (S) قد لا يكون لها أي حل, و قد يكون لها عدد لا منته من الحلول.
- إذا كان $\Delta\neq0$ فان النظمة (S) تسمى نظمة كرامر و تقبل حلا وحيدا هو الزوج (x,y) حيث:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}c & b\\ c' & b'\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{cb'-c'b}{\Delta} \text{ و } y=\frac{\begin{vmatrix}a & c\\ a' & c'\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{ac'-a'c}{\Delta} .$$

هذه الطريقة تسمى طريقة المحددة.

مثال: طريقة المحددة:

حل في $\mathbb{R}^2$ النظمة: $(1)\begin{cases}x+2y=4\\ -x+4y=2\end{cases}$

محددة النظمة (1) هي: $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{vmatrix}=6\neq0$ و منه النظمة تقبل حلا

وحيدا:هو $x=\frac{\begin{vmatrix}4 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{12}{6}=2$ و $y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 4\\ -1 & 2\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{6}{6}=1$ و منه: $S=\{(2,1)\}$

تمرين 12 : 1) $\begin{cases}x-2y=1\\ -2x+4y=-2\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3x-4y=2\\ -x+\frac{4}{3}y=-\frac{1}{3}\end{cases}$

3) $\begin{cases}\left(\sqrt5-\sqrt3\right)x+\left(\sqrt2-1\right)y=0\\ \left(\sqrt2+1\right)x+\left(\sqrt5+\sqrt3\right)y=1\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x+y=11\\ x^2-y^2=44\end{cases}$

أجوبة: 1) محددة النظمة هي: $\Delta=\begin{vmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{vmatrix}=0$

$$\begin{cases}x-2y=1\\ -2x+4y=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y=1\\ -2(x-2y)=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y=1\\ x-2y=1\end{cases}$$

$$y=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x\Leftrightarrow-2y=1-x\Leftrightarrow x-2y=1\Leftrightarrow$$

ومنه النظمة (S) لها عدد لا منته من الحلولاذن :

$$S=\left\{\left(x;\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)/x\in\mathbb{R}\right\}$$

2) $\begin{cases}3x-4y=2\\ 3x-4y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-4y=2\\ -x+\frac{4}{3}y=-\frac{1}{3}\end{cases}$ بضرب المعادلة الثانية في 3-

وهذا غير ممكن ومنه $S=\varnothing$

3) $\begin{cases}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)x+\left(\sqrt{2}-1\right)y=0\\ \left(\sqrt{2}+1\right)x+\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)y=1\end{cases}$

محددة النظمة هي:

$$\Delta=\begin{vmatrix}\sqrt{5}-\sqrt{3} & \sqrt{2}-1\\ \sqrt{2}+1 & \sqrt{5}+\sqrt{3}\end{vmatrix}=\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)-\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)$$

$\Delta=\left(\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2\right)-\left(\left(\sqrt{2}\right)^2-(1)^2\right)$ اذن $\Delta=(5-3)-(2-1)=1\neq 0$

و منه النظمة تقبل حلا وحيدا:

هو $x=\dfrac{\begin{vmatrix}0 & \sqrt{2}-1\\ 1 & \sqrt{5}+\sqrt{3}\end{vmatrix}}{\Delta}=\dfrac{-\left(\sqrt{2}-1\right)}{1}=-\sqrt{2}+1=1-\sqrt{2}$

و $y=\dfrac{\begin{vmatrix}\sqrt{5}-\sqrt{3} & 0\\ \sqrt{2}+1 & 1\end{vmatrix}}{\Delta}=\dfrac{-\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{1}=-\sqrt{5}+\sqrt{3}=\sqrt{3}-\sqrt{5}$

و منه: $S=\left\{\left(1-\sqrt{2},\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\right\}$

تمرين 13 : 1) حل في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ النظمة التالية : $\begin{cases}-7x-3y=4\\ 4x+5y=-2\end{cases}$

2) استنتج حلول النظمة التالية : $\begin{cases}\dfrac{-7}{x}-\dfrac{3}{y}=4\\ \dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{y}=-2\end{cases}$

أجوبة: 1) محددة النظمة (1) هي: $\Delta=\begin{vmatrix}-7 & -3\\ 4 & 5\end{vmatrix}=-35+12=-23\neq 0$ و منه النظمة تقبل حلا وحيدا:

هو $x=\dfrac{\begin{vmatrix}4 & -3\\ -2 & 5\end{vmatrix}}{\Delta}=-\dfrac{14}{23}$ و $y=\dfrac{\begin{vmatrix}-7 & 4\\ 4 & -2\end{vmatrix}}{\Delta}=-\dfrac{2}{23}$ ومنه: $S=\left\{\left(-\dfrac{14}{23},-\dfrac{2}{23}\right)\right\}$

2) لكي تكون للنظمة معنى يجب أن يكون لدينا : $x\neq 0$ و $y\neq 0$

$\begin{cases}\dfrac{-7}{x}-\dfrac{3}{y}=4\\ \dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{y}=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-7\dfrac{1}{x}-3\dfrac{1}{y}=4\\ 4\dfrac{1}{x}+5\dfrac{1}{y}=-2\end{cases}$ نضع: $X=\dfrac{1}{x}$ و $Y=\dfrac{1}{y}$

$x\neq 0$ و $y\neq 0$ فنحصل على النظمة التالية : $\begin{cases}-7X-3Y=4\\ 4X+5Y=-2\end{cases}$

وسبق أن قمنا بحل هذه النظمة : $X=-\dfrac{14}{23}$ و $Y=-\dfrac{2}{23}$

و منه : $\dfrac{1}{x}=-\dfrac{14}{23}$ و $\dfrac{1}{y}=-\dfrac{2}{23}$ يعني: $x=-\dfrac{23}{14}$ و $y=-\dfrac{23}{2}$

و بالتالي: $S=\left\{\left(-\dfrac{23}{14},-\dfrac{23}{2}\right)\right\}$

تمرين 14 : حل في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ النظمة التالية : $\begin{cases}\dfrac{5}{x-1}+\dfrac{3}{y-2}=4\\ \dfrac{-2}{x-1}+\dfrac{1}{y-2}=1\end{cases}$

أجوبة: نضع: $X=\dfrac{1}{x-1}$ و $Y=\dfrac{1}{y-2}$

$x\neq 1$ و $y\neq 1$

فنحصل على النظمة التالية : $\begin{cases}5X+3Y=4\\ -2X+Y=1\end{cases}$

ونقوم بحل هذه النظمة ونجد : $X=\dfrac{1}{11}$ و $Y=\dfrac{13}{11}$

و منه : $\dfrac{1}{11}=\dfrac{1}{x-1}$ و $\dfrac{13}{11}=\dfrac{1}{y-2}$

يعني: $x-1=11$ و $y-2=\dfrac{11}{13}$ يعني: $x=12$ و $y=\dfrac{37}{13}$

و بالتالي: $S=\left\{\left(12,\dfrac{37}{13}\right)\right\}$

تمرين 15 : حل في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ النظمة التالية : $\begin{cases}2\sqrt{x}+\sqrt{y}=6\\ -3\sqrt{x}+5\sqrt{y}=17\end{cases}$

أجوبة: نضع: $X=\sqrt{x}$ و $Y=\sqrt{y}$

فنحصل على النظمة التالية : $\begin{cases}2X+Y=6\\ -3X+5Y=17\end{cases}$

ونقوم بحل هذه النظمة ونجد : $X=1$ و $Y=4$

و منه : $\sqrt{x}=1$ و $\sqrt{y}=4$ يعني: $\left(\sqrt{x}\right)^2=(1)^2$ و $\left(\sqrt{y}\right)^2=4^2$

يعني: $x=1$ و $y=16$ و بالتالي: $S=\left\{(1,16)\right\}$

تمرين 16: حل في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ النظمة التالية : $\begin{cases}2x^2-5y^2=1\\ 4x^2+3y^2=15\end{cases}$

أجوبة: نضع: $X=x^2$ و $Y=y^2$

فنحصل على النظمة التالية : $\begin{cases}2X-5Y=1\\ 4X+3Y=15\end{cases}$

ونقوم بحل هذه النظمة ونجد : $X=3$ و $Y=1$

و منه : $x^2=3$ و $y^2=4$

يعني: $x=\sqrt{3}$ او $x=-\sqrt{3}$ و : $y=\sqrt{1}$ او $y=-\sqrt{1}$

يعني: $x=\sqrt{3}$ او $x=-\sqrt{3}$ و : $y=1$ او $y=-1$

و بالتالي: $S=\left\{\left(\sqrt{3},1\right),\left(\sqrt{3},-1\right),\left(-\sqrt{3},1\right),\left(-\sqrt{3},-1\right)\right\}$

تمرين 17 : حل في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ النظمة التالية :

$$\begin{cases}\left(x^2-3x+1\right)+\left(y^2-5x+4\right)=-3\\ 2\left(x^2-3x+1\right)-3\left(y^2-5x+4\right)=4\end{cases}$$

أجوبة: نضع: $X=x^2-3x+1$ و $Y=y^2-5x+4$

فنحصل على النظمة التالية : $\begin{cases}X+Y=-3\\ 2X-3Y=4\end{cases}$

ونقوم بحل هذه النظمة ونجد : $X=-1$ و $Y=-2$

و منه : $x^2-3x+1=-1$ و $y^2-5x+4=-2$

يعني: $x^2-3x+2=0$ و $y^2-5x+6=0$

نحل المعادلة: $x^2-3x+2=0$ باستعمال المميز فنجد :

$$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times1\times(2)=1>0$$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\dfrac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times1}=2$ و $x_2=\dfrac{-(-3)-\sqrt{1}}{2\times1}=\dfrac{3}{2}$

نحل المعادلة: $y^2-5x+6=0$ باستعمال المميز فنجد :

$$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times1\times6=1>0$$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$y_1=\dfrac{-(-5)+\sqrt{1}}{2\times1}=3$ و $y_2=\dfrac{-(-5)-\sqrt{1}}{2\times1}=2$

و بالتالي: $S=\left\{(1,3),(1,2),(2,3),(2,2)\right\}$

VII. المتراجحات و التجويه

دراسة مثال : في الشكل أسفله نعتبر المستقيم (D) الذي معادلته: $\frac{1}{2}x-y+1=0$. المستقيم (D) يحدد نصفي مستوى حافتهما (D) أحدهما يحتوي على النقطة O (أصل المعلم) و نرمز له بالرمز (P_2) و للآخر بالرمز (P_1).

← النقطة $A(1,1)$ تنتمي إلى (P_2) و تحقق:

$\frac{1}{2}x_A-y_A+1\succ 0$ لأن: $\frac{1}{2}-1+1\succ 0$

← النقطة $B(-2,1)$ تنتمي إلى (P_1) و تحقق:

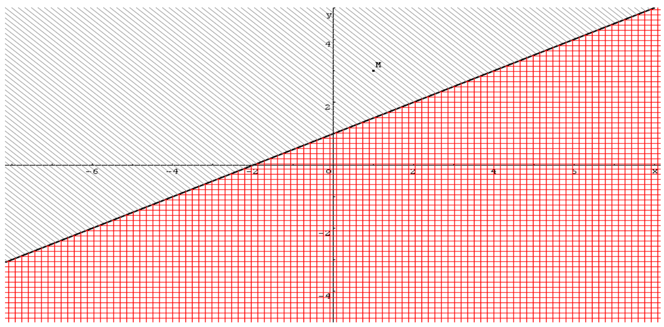
$\frac{1}{2}x_B-y_B+1\prec 0$ لأن: $\frac{1}{2}\times(-2)-1+1\prec 0$

إذا أخذنا نقطة أخرى M تنتمي إلى نصف المستوى (P_2). فان المتفاوتة $\frac{1}{2}x_M-y_M+1\succ 0$ محققة (يمكنك التحقق من بعض النقط).

و إذا أخذنا نقطة أخرى N تنتمي إلى نصف المستوى (P_1). فان المتفاوتة $\frac{1}{2}x_N-y_N+1\prec 0$ محققة.

و بالتالي كل نقطة $M(x,y)$ من (P_2), تحقق $\frac{1}{2}x-y+1\succ 0$.

و كل نقطة $M(x,y)$ من (P_1) تحقق $\frac{1}{2}x-y+1\prec 0$.



إشارة $ax+by+c$:

خاصية: نعتبر في المعلم $(o,\vec{i},\vec{j})$ المستقيم الذي معادلته $ax+by+c=0$ المستقيم (D) يحدد نضفي مستوى مفتوحين:

- أحدهما هو مجموعة النقط $M(x,y)$ التي تحقق المتفاوتة $ax+by+c\succ 0$.
- و الآخر هو مجموعة النقط $M(x,y)$ التي تحقق $ax+by+c\prec 0$.

كل معادلة تكتب على الشكل $ax+by+c=0$ حيث $a\neq 0$ أو $b\neq 0$ هي معادلة مستقيم.

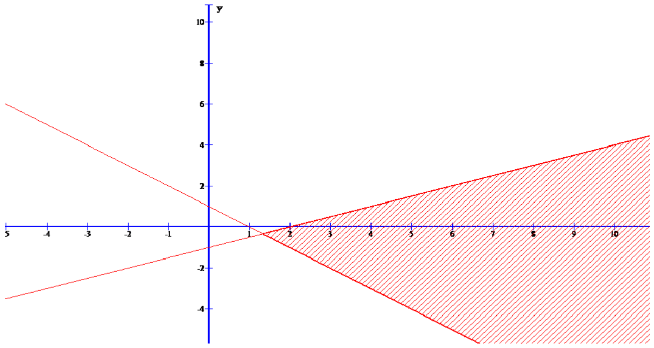
تمرين 18 : حل مبيانيا النظمة التالية:

$$(S_1)\begin{cases}x+y-1>0\\-x+2y+2<0\end{cases}$$

الجواب : نرسم أولآ المستقيمات التالية :

$$x+y-1=0;-x+2y+2=0$$

وبعد ذالك يجب الحصول على الشكل التالي و هو الحل المبياني:



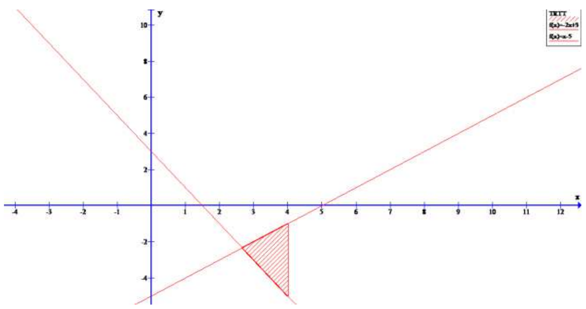
تمرين 19 : حل مبيانيا النظمة التالية:

$$(S)\begin{cases}2x+y-3>0\\-x+y+5<0\\x<4\end{cases}$$

الجواب : نرسم أولآ المستقيمات التالية :

$$2x+y-3=0;-x+y+5=0;x=4$$

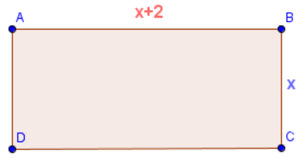
وبعد ذالك يجب الحصول على الشكل التالي و هو الحل المبياني:



تربيض وضعيات :

تمرين 20 : أحسب طول عرض مستطيل اذا علمت أن طوله يزيد عن عرضه ب $2cm$ وأن مساحته تساوي $15cm^2$

الجواب



ليكن x وعرض مستطيل اذن طوله هو : $x+2$ ومنه مساحته هي :

$$S = x(x+2) = 15$$

ومنه نحصل عن معادلة من الدرجة الثانية :

$x^2+2x-15=0$: $a=1$ و $c=-15$ و $b=2$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4\times1\times(-15) = 64 > 0$$

بما أن $\Delta \succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \frac{-2+8}{2\times1} = 3$ و $x_2 = \frac{-2-8}{2\times1} = -5 < 0$

ومنه:بما أن عرض مستطيل لا يمكن أن يكون سالبا :

نأخذ $x=3$

وبالتالي طوله هو : $5cm$

« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.
c'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien