

I. المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد (تنكير)

تعريف: ليكن a و b عددين حقيقيين. كل معادلة على الشكل $ax + b = 0$ تسمى معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد, حيث x هو المجهول.

مثال 1: حل في \mathbb{R} المعادلة: $(E): -2x + 22 = 0$ (يجب التأكيد على كتابة مجموعة الحل)

مثال 2: حل في \mathbb{R} المعادلة: $(E): 3(2x + 5) = 6x - 1$

مثال 3: حل في \mathbb{R} المعادلة: $(E): 4(x - 2) = 6x - 2(x + 4)$

II. معادلات تؤول في حلها إلى معادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد:

معادلات من النوع: $(ax + b)(cx + d) = 0$

مثال 1: حل في \mathbb{R} المعادلة: $(E): (2x - 1)(3 + x) = 0$

مثال 2: حل في \mathbb{R} المعادلة: $(E) \frac{3x - 2}{x + 1} = 0$

مثال 3: حل في \mathbb{R} المعادلات التالية: $|x - 2| = 0$, $|3x + 1| = 4$, $|2x - 5| = -1$

III. المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد (تنكير):

تعريف: ليكن a و b عددين حقيقيين كل متراجحة على الشكل $ax + b \geq 0$ أو $ax + b > 0$ أو $ax + b \leq 0$ أو $ax + b < 0$ تسمى متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد حيث x هو المجهول.

إشارة الحدانية $ax + b$:

حسب إشارة العدد a , لدينا الجدولان الآتيان:

x	<u>إذا كان $a < 0$</u>		
	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	+	0	-

x	<u>إذا كان $a > 0$</u>		
	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	-	0	+

تلخص الجدولين في الجدول التالي:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	إشارة a عكس إشارة a		

مثال 1: لنحدد إشارة $2x + 1$

مثال 2: لنحدد إشارة $-x + 2$

تمرين: حل في \mathbb{R} المتراجحات التالية: $2x + 1 \geq 0$ و $-3x + 6 \geq 0$ و $2x + 8 \leq 0$ و $-2x + 16 > 0$

مثال 3: أعط جدول إشارة التعبيرات التالية: $p(x) = (1 - x)(2x + 3)$ و $q(x) = \frac{5x - 2}{1 + 3x}$ و $R(x) = (x + 1)^2(x + 2)(-x + 3)$

الطريقة: في جدول تعطي إشارة كل عامل على الشكل $ax + b$ ثم استنتج إشارة الجداء أو الخارج مع ترتيب تزايد للقيم التي ينعدم فيها كل عامل.

IV. المعادلات من الدرجة الثانية بمجهول واحد:

تعريف: المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ حيث x هو المجهول أعداد حقيقية معلومة ($a \neq 0$) تسمى معادلة من الدرجة الثانية بمجهول واحد.

مثال 1: العدد -1 حل للمعادلة $3x^2 + 5x + 2 = 0$ لأن: $3(-1)^2 + 5(-1) + 2 = 0$

مثال 2: العدد $\sqrt{3}$ حل للمعادلة $x^2 + (1 - \sqrt{3})x - \sqrt{3} = 0$

لأن: $(\sqrt{3})^2 + (1 - \sqrt{3})\sqrt{3} - \sqrt{3} = 3 + \sqrt{3} - 3 - \sqrt{3} = 0$

ملاحظة: كل عدد حقيقي x_0 يحقق المتساوية $ax^2 + bx + c = 0$ هو حل للمعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ و يسمى جذر للحدودية $ax^2 + bx + c$.



الشكل القانوني لثلاثية الحدود $ax^2 + bx + c$.

خاصية: a و b و c ثلاثة أعداد حقيقية, و a غير منعدم.

$$\text{لكل } x \text{ من } \mathbb{R} \text{ لدينا: } ax^2 + bx + c = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right)$$

الكتابة $a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right)$, تسمى الشكل القانوني لثلاثية الحدود $ax^2 + bx + c$.

مثال: نعتبر الحدودية $P(x) = 2x^2 + 5x + 2$.

حل معادلة من الدرجة الثانية بمجهول واحد:

تعريف: لتكن ثلاثية الحدود $P(x) = ax^2 + bx + c$.

العدد الحقيقي $b^2 - 4ac$ يسمى مميز ثلاثية الحدود أو مميز المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ ونرمز له بالرمز Δ .

مثال: نعتبر المعادلة $(E): 3x^2 - 5x + 7 = 0$ لنحسب مميز المعادلة (E)

ملاحظة: الرمز Δ يقرأ: دلتا.

مثال 1: الشكل القانوني لثلاثية الحدود: لنحدد الشكل القانوني لثلاثية الحدود: $2x^2 + 6x + 15$

مثال 2: لنحدد الشكل القانوني لثلاثية الحدود: $2x^2 + 5x$

تحديد مجموعة حلول معادلة من الدرجة الثانية بمجهول واحد:

نعتبر المعادلة: $ax^2 + bx + c = 0$ (E) لدينا: $ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$ و بما أن: $\Delta = b^2 - 4ac$ و $4a^2 = (2a)^2$

$$\text{فان: } ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{(2a)^2} \right]$$

▪ إذا كان $\Delta < 0$ فان: $-\frac{\Delta}{(2a)^2} > 0$ و بالتالي المعادلة (E) ليس لها حل في \mathbb{R} .

▪ إذا كان $\Delta = 0$ فان المعادلة (E) تكتب $a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = 0$

و بما أن $\Delta < 0$ فان حل المعادلة (E) هو $x = -\frac{b}{2a}$.

▪ إذا كان $\Delta > 0$ فان المعادلة (E) تكتب $a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\Delta}{2a} \right)^2 = 0$ أي $\left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) = 0$

و بالتالي المعادلة (E) تقبل حلين مختلفين هما: $\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ و $\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

في حالة $\Delta = 0$ نقول إن المعادلة (E) تقبل حلا مزدوجا.

خاصية: نعتبر المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) وليكن Δ مميزها.

✓ إذا كان $\Delta < 0$ فان المعادلة ليس لها حل في \mathbb{R} .

✓ إذا كان $\Delta = 0$ فان المعادلة تقبل حلا وجيدا هو: $-\frac{b}{2a}$

✓ إذا كان $\Delta > 0$ فان المعادلة تقبل حلين مختلفين هما: $\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ و $\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

نرمز لمجموعة حلول المعادلة بالرمز S .

مثال 1: المعادلة $3x^2 + x + 2 = 0$

مثال 2: المعادلة $x^2 - 10x + 25 = 0$

مثال 3: نعتبر المعادلة $x^2 - 3x + 2 = 0$

مجموع و جذء حلى معادلة من الدرجة الثانية:

خاصية: إذا كان للمعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) حلان x_1 و x_2 فإنهما يحققان المتساويتين $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ و $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

V. تعميل وإشارة ثلاثية الحدود $ax^2 + bx + c$:

تعميل ثلاثية الحدود $ax^2 + bx + c$:

خاصية: نعتبر ثلاثية الحدود $ax^2 + bx + c$ وليكن Δ مميزها.

1. إذا كان: $\Delta > 0$ فإن المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ تقبل حلين مختلفين x_1 و x_2 .

ولدينا: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

2. إذا كان: $\Delta = 0$ فإن: $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$

3. إذا كان: $\Delta < 0$ فإن: $ax^2 + bx + c$ لا يمكن تعميلها إلى حدوديتين من الدرجة الأولى.

مثال: نعتبر الحدودية $R(x) = 6x^2 - x - 1$

إشارة ثلاثية الحدود $ax^2 + bx + c$:

خاصية: نعتبر ثلاثية الحدود $P(x) = ax^2 + bx + c$ وليكن Δ مميزها.

1. إذا كان $\Delta < 0$ فإن إشارة $P(x)$ هي إشارة العدد a .

2. إذا كان $\Delta = 0$ فإن إشارة $P(x)$ هي إشارة a لكل x من \mathbb{R} يخالف $-\frac{b}{2a}$ و $P\left(-\frac{b}{2a}\right) = 0$.

3. إذا كان $\Delta > 0$ و x_1 و x_2 هما جذري ثلاثية الحدود $P(x)$ فإن: $P(x)$ لها إشارة العدد a خارج الجذرين x_1 و x_2 لها عكس

إشارة العدد a داخل الجذرين و $P(x_1) = P(x_2) = 0$.

مثال: لنحدد إشارة الحدودية $P(x) = 6x^2 - x - 1$

ملحوظة: لحل مترابطة من الدرجة الثانية بمجهول واحد نعتمد على دراسة إشارة ثلاثية الحدود المرتبطة بها.

نتيجه:

▪ إذا كان $\Delta < 0$ فإن: $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}\right]$

و بما أن: $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2} > 0$ فإن إشارة ثلاثية الحدود $ax^2 + bx + c$ هي إشارة a .

▪ إذا كان: $\Delta = 0$ فإن: $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ وبالتالي إذا كان $x \neq -\frac{b}{2a}$ فإن إشارة $ax^2 + bx + c$ هي إشارة a .

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
a	إشارة a	إشارة a	إشارة a	إشارة a
$x - x_1$	-	+		+
$x - x_2$	-	-		+
$(x - x_1)(x - x_2)$	+	-		+
$a(x - x_1)(x - x_2)$	إشارة a	إشارة $(-a)$		إشارة a

▪ إذا كان $\Delta > 0$ فإن: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ حيث x_1 و x_2 هما حلي المعادلة $ax^2 + bx + c$

لنضع جدول إشارة الجداء: نفترض أن $x_1 < x_2$.

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	إشارة a	إشارة $(-a)$	إشارة a	إشارة a

VI. معادلات من الدرجة الأولى بمجهولين:

\mathbb{R}^2 هي مجموعة الأزواج (x, y) حيث $x \in \mathbb{R}$ و $y \in \mathbb{R}$.

مثال: نعتبر في المجموعة \mathbb{R}^2 المعادلة: $2x + 3y = 2$

1. تأكد أن الزوج $\left(0, \frac{2}{3}\right)$ حل للمعادلة: $2x + 3y = 2$

2. اعط ثلاث أزواج حلول للمعادلة: $2x + 3y = 2$

3. حل في \mathbb{R}^2 المعادلة: $2x + 3y = 2$

تعريف و خاصية: كل معادلة على شكل $(1) ax + by = c$ حيث a و b و c أعداد حقيقية هي معادلة من الدرجة الأولى بمجهولين x و y .

يكون الزوج (x_0, y_0) حلا للمعادلة (1) إذا و فقط إذا كان $ax_0 + by_0 = c$.

حل المعادلة (1) يعني تحديد جميع الأزواج $(\alpha; \beta)$ التي تحقق $a\alpha + b\beta = c$.

إذا كان $a \neq 0$ أو $b \neq 0$ فإن المعادلة $ax + by = c$ تقبل ما لا نهاية من الحلول.

مثال: الزوج $(3, 2)$ حل للمعادلة: $3x - y = 7$ لأن $3 \times 3 - 2 = 7$ وكذلك الزوج $(2, -1)$.

VII. نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين:

اعتمادا على النشاط رقم 9 لدينا التعريف و الخاصية الآتيتان:

نعتبر النظمة: $(S) : \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ حيث a و b و a' و b' و c و c' أعداد حقيقية.

هناك عدة طرق لحل نظمة سبق أن درست طريقتين هما طريقة التعويض و التآليفة الخطية طبعاً هناك طريقة أخرى انتبه

تعريف و خاصية: العدد الحقيقي $ab' - a'b$ يسمى محددة النظمة (S) و نكتب: $D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$

إذا كان $D = 0$ فإن النظمة (S) قد لا يكون لها أي حل, و قد يكون لها عدد لا منته من الحلول.

إذا كان $D \neq 0$ فإن النظمة (S) تسمى نظمة كرامر و تقبل حلا وحيدا هو الزوج (x, y) حيث:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{D} = \frac{ac' - ac}{D} \quad \text{و} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{D} = \frac{cb' - bc}{D}$$

هذه الطريقة تسمى طريقة المحددة.

مثال: طريقة المحددة:

$$(1) \begin{cases} x + 2y = 4 \\ -x + 4y = 2 \end{cases} \text{ حل في } \mathbb{R}^2 \text{ النظمة:}$$