تمارين و حلول

تمرين1

نعتبر f و g دالتين عدديتين لمتغير حقيقي حيث $f(x)=x^2-2x \quad ; \quad g(x)=\dfrac{-2x-1}{-2x+1}$

1 - حدد مجموعة تعريف الدالة g

2 - أعط جدول تغيرات لكل دالة من الدالتين f و g

-3 أ) أنقل الجدول التالي و أتممه

x	-1	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	3
$f(x)$					
$g(x)$					

ب) حدد تقاطع C_f و محور الافاصيل

ج) أنشئ المنحنيين C_f و C_g في نفس المعلم المتعامد الممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

الجواب

$f(x)=x^2-2x \quad ; \quad g(x)=\dfrac{-2x-1}{-2x+1}$

1 - نحدد مجموعة تعريف الدالة g

ليكن $x\in\mathbb{R}$ $\quad -2x+1\neq 0$ تكافئ $\quad x\neq\dfrac{1}{2}$ إذن $\quad D_f=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

2 - نعطي جدول تغيرات لكل دالة من الدالتين f و g

جدول تغيرات f $\quad a=1 \quad \dfrac{-b}{2a}=1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f		↘	-1	↗	

جدول تغيرات g لدينا $\begin{vmatrix}-2 & -1\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-4$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
g		↘	‖	↘	

-3 أ - نتمم الجدول

x	-1	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	3
$f(x)$	3	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	3
$g(x)$	$\frac{1}{3}$	0	-1	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{5}$

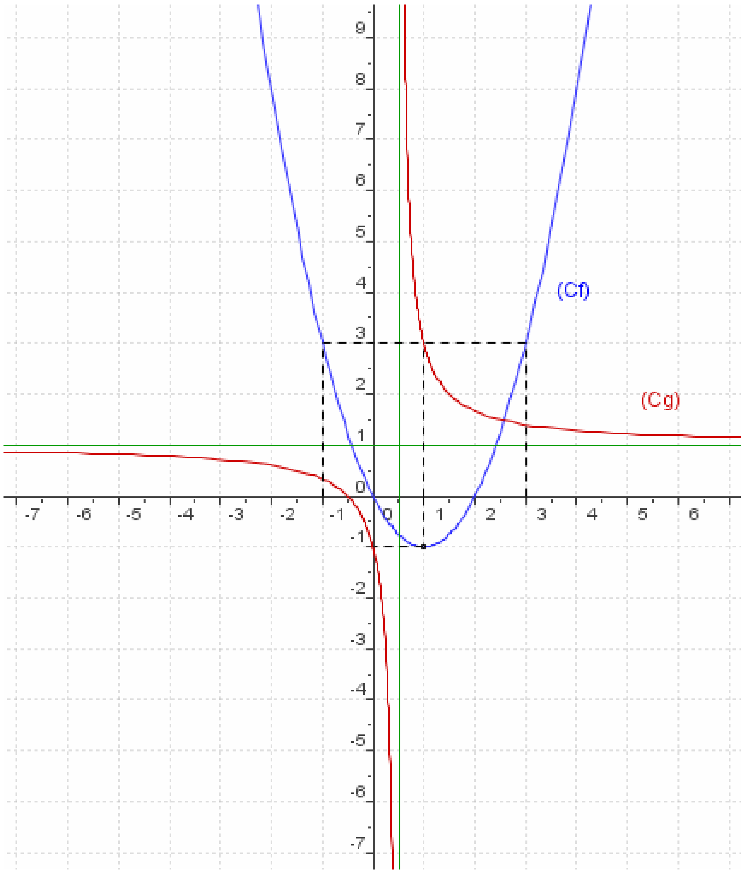
ب) نحدد تقاطع C_f و محور الافاصيل

ليكن $x\in\mathbb{R}$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-2x=0$$
$$\Leftrightarrow x=0 \quad ou \quad x=2$$

إذن C_f يقطع محو الافاصيل في النقطتين ذات الافصولين 0 و 2 على التوالي

ج) إنشاء المنحنيين C_f و C_g في نفس المعلم المتعامد الممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$



تمرين2

لتكن f و g الدالتين العدديتين للمتغير الحقيقي x المعرفتين بـ

$$g(x)=x^2-3|x| \qquad f(x)=\frac{2x-1}{x-1}$$

وليكن C_f و C_g منحنييهما على التوالي في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- أ- حدد D_f

ب- أحسب $f(2)$ و $g(2)$ و $f\left(\frac{1}{2}\right)$ و $g(4)$

2- أعط جدول تغيرات f

3- أ- أدرس زوجية g

ب- بين أن g تناقصية على $\left[0;\frac{3}{2}\right[$ و تزايدية على $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

د- أعط جدول تغيرات g على $\mathbb{R}$

4- حدد تقاطع C_g و محور الأفاصيل

5 - أ- أنشئ C_f و C_g

ب- حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة $f(x)=g(x)$

ج – حل مبيانيا المتراجحة $x^2-3|x|\geq 0$

الجواب

$$g(x)=x^2-3|x| \qquad f(x)=\frac{2x-1}{x-1}$$

2- أ- نحدد D_f

لتكن $x \in \mathbb{R}$

$x \in D_f$ تكافئ $x-1 \neq 0$

تكافئ $x \neq 1$

إذن $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

ب- نحسب $f(2)$ و $g(2)$ و $f\left(\frac{1}{2}\right)$ و $g(4)$

$$f(2) = \frac{4-1}{2-1} = 3 \quad ; \quad g(2) = 4-6 = -2 \quad ; \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \quad ; \quad g(4) = 16-12 = 4$$

-2 نحدد تغيرات f

لدينا $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$ ومنه f تناقصية على كل من $]-\infty;1[$ و $]1;+\infty[$

جدول تغيرات f

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f	$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$

-3 أ- ندرس زوجية g

لكل $x \in \mathbb{R}$ لدينا $-x \in \mathbb{R}$

$$g(-x) = (-x)^2 - 3|-x| = x^2 - 3|x| = g(x)$$

g دالة زوجية

ب- بين أن g تناقصية على $\left[0;\frac{3}{2}\right[$ و تزايدية على $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

لدينا $g(x) = x^2 - 3x$ لكل x من $[0;+\infty[$

$$a = 1 \qquad b = -3 \qquad c = 0 \qquad \frac{-b}{2a} = \frac{3}{2}$$

معامل x^2 هو العدد الموجب 1 و منه الدالة $x \to x^2 - 3x$ تزايدية $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$ و تناقصية على $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right]$

اذن g تناقصية على $\left[0;\frac{3}{2}\right[$ و تزايدية على $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

د- نعطي جدول تغيرات g على $\mathbb{R}$

لدينا g تناقصية على $\left[0;\frac{3}{2}\right[$ و تزايدية على $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

و حيث أن g زوجية فان g تزايدية على $\left]-\frac{3}{2};0\right]$ و تناقصية على $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$

جدول تغيرات g

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
g		$\searrow$	$\frac{9}{4}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\frac{9}{4}$	$\nearrow$	

-4 نحدد تقاطع C_g و محور الأفاصيل

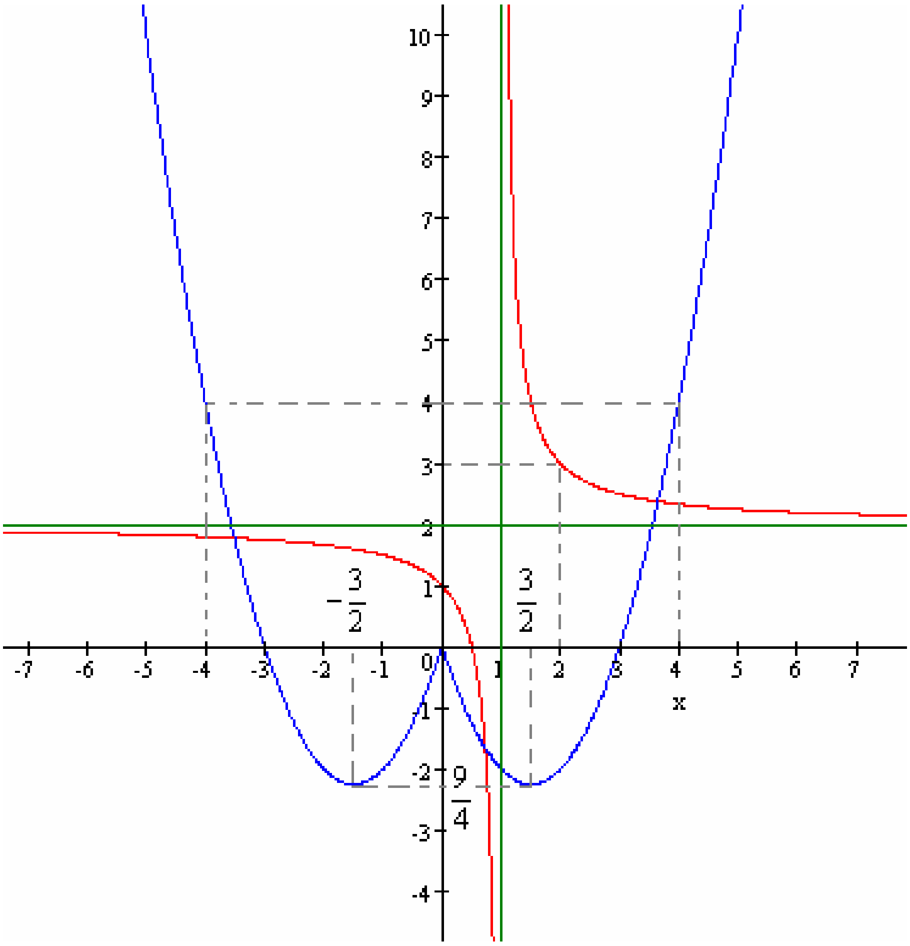
بما أن g زوجية فانه يكفي تحديد تقاطع C_g و محور الأفاصيل على $\mathbb{R}^+$ و استنتاج التقاطع على $\mathbb{R}^-$

ليكن $x \in \mathbb{R}^+$: $\qquad g(x) = 0$ تكافئ $x^2 - 3x = 0$

تكافئ $x = 0$ أو $x = 3$

إذن C_g و محور الأفاصيل يتقاطعان في النقط ذات الأفاصيل 0 و 3 و -3 على التوالي

5 - أ- ننشئ C_f و C_g



ب- نحدد مبيانيا عدد حلول المعادلة $f(x)=g(x)$

من خلال التمثيل المبياني نلاحظ أن C_f و C_g يتقاطعان في ثلاث نقط

ومنه للمعادلة $f(x)=g(x)$ ثلاثة حلول

ج – نحل مبيانيا المتراجحة $x^2-3|x|\geq 0$

$x^2-3|x|\geq 0$ تكافئ $g(x)\geq 0$ تكافئ C_g فوق محور الأفاصيل

من خلال التمثيل المبياني يتضح أن C_g فوق محور الأفاصيل أو ينطبقان في $]-\infty;-3]\cup[3;+\infty[\cup\{0\}$

إذن $S=]-\infty;-3]\cup[3;+\infty[\cup\{0\}$

تمرين3

لتكن f و g الدالتين العدديتين للمتغير الحقيقي x المعرفتين بـ

$$f(x)=x^2-x \qquad\qquad g(x)=\frac{2|x|-1}{|x|-1}$$

وليكن C_f و C_g منحنييهما على التوالي في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

3- أ- حدد D_g

ب- أحسب $f(2)$ و $g(2)$ و $f\left(\frac{1}{2}\right)$ و $g(0)$ و $g\left(\frac{1}{2}\right)$

2- أ- أعط جدول تغيرات f

ب- حدد طبيعته المنحنى C_f

3- أ- بين أن g دالة زوجية

ب- حدد تغيرات g و أعط جدول تغيراتها

4- أ- أنشئ C_f و C_g

ب- حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة $f(x)=g(x)$

الجواب

$$f(x)=x^2-x \qquad g(x)=\frac{2|x|-1}{|x|-1}$$

4- أ- نحدد D_g

ليكن $x\in\mathbb{R}$

$x\in D_g$ تكافئ $|x|-1\neq 0$

تكافئ $|x|\neq 1$

تكافئ $x\neq 1$ و $x\neq -1$

إذن $D_g=\mathbb{R}-\{1;-1\}$

ب- نحسب $f(2)$ و $g(2)$ و $f\left(\frac{1}{2}\right)$ و $g(0)$ و $g\left(\frac{1}{2}\right)$

$$f(2)=2^2-2=4-2=2 \quad ; \quad g(2)=\frac{2\times 2-1}{2-1}=3$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{-1}{4} \quad ; \quad g(0)=\frac{2\times 0-1}{0-1}=1 \quad ; \quad g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2\times\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}-1}=0$$

2- أ- نعطي جدول تغيرات f

لدينا $f(x)=x^2-x$ أي $a=1$ و $\frac{-b}{2a}=\frac{1}{2}$

ومنه جدول تغيرات f

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
f	↖	$\frac{-1}{4}$	↗

ب- حدد طبيعته المنحنى C_f

C_f شلجم رأسه $A\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)$ و محور تماثلة المستقيم ذا المعادلة $x=\frac{1}{2}$

3- أ- نبين أن g دالة زوجية

لكل $x\in\mathbb{R}-\{1;-1\}$ لدينا $-x\in\mathbb{R}-\{1;-1\}$

ليكن $x\in\mathbb{R}-\{1;-1\}$
$$g(-x)=\frac{2|-x|-1}{|-x|-1}=\frac{2|x|-1}{|x|-1}=g(x)$$

إذن g دالة زوجية

ب- نحدد تغيرات g و نعطي جدول تغيراتها

لكل x من $[0;1[\cup]1;+\infty[$: $|x|=x$ ومنه $g(x)=\frac{2x-1}{x-1}$

و حيث $\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-1\prec 0$ فان g تناقصية على كل من $]1;+\infty[$ و $[0;1[$

و بما أن g دالة زوجية فان g تزايدية على كل من $]-\infty;-1[$ و $]-1;0]$

جدول تغيرات g

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
g		$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

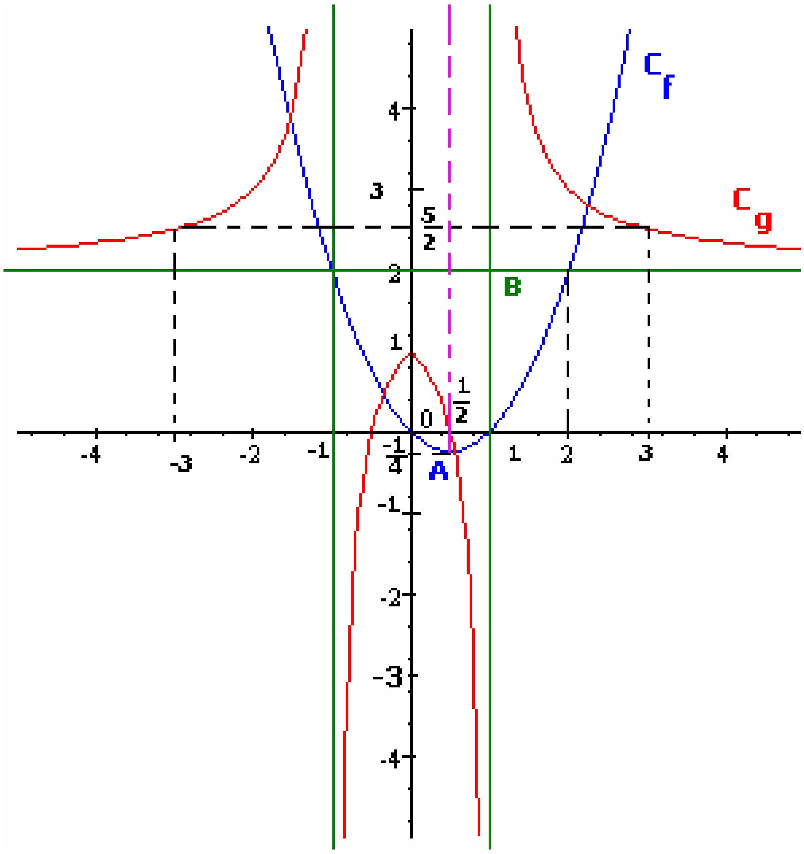
4- أ- ننشئ C_f و C_g

بما أن g زوجية فان C_g متماثل بالنسبة لمحور الأراتيب

جزئ منحنى C_g على $[0;1[\cup]1;+\infty[$ هو جزئ من هذلول مركزه $B(1;2)$ ومقارباه

$(\Delta_2): x=1 \quad (\Delta_1): y=2$

C_f شلجم رأسه $A\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)$



ب- نحدد مبيانيا عدد حلول المعادلة $f(x)=g(x)$

من خلا ل التمثيل المبياني نلاحظ أن C_f و C_g

يتقاطعان في أربع نقط

ومنه المعادلة $f(x)=g(x)$ تقبل أربعة حلول

تمارين حول الدوال

تمرين1

نعتبر f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ

$$\begin{cases} f(x)=\frac{1}{2}x^2 & x\leq 2 \\ f(x)=\frac{4}{x} & x\succ 2 \end{cases}$$

1- حدد D_f ثم أعط جدول تغيرات الدالة f

2- أنشئ (C_f) في مستوى منسوب الى م.م.م $(O;\vec{i};\vec{j})$

تمرين2

نعتبر f و g الدالتين العدديتين لمتغير حقيقي معرفتين بـ $f(x)=-2x^2$ $\quad g(x)=\frac{1}{4x}$

1- أعط جدول تغيرات كل من f و g

2- حدد تقاطع (C_f) و (C_g)

3- أنشئ (C_f) و (C_g) في نفس المستوى المنسوب إلى م.م.م $(O;\vec{i};\vec{j})$

4- حل مبيانيا المتراجحة $f(x)\geq g(x)$

تمرين3

نعتبر f دالة عددية معرفة بـ $f(x)=\frac{1}{|x|}$

1- حدد D_f و تأكد أن f دالة زوجية

2- أنشئ (C_f)

3- أعط جدول تغيرات f

تمرين4

نعتبر f دالة عددية معرفة بـ $f(x)=2x|x|$

1- بين أن f دالة فردية

2- حدد جدول تغيرات f على $\mathbb{R}$

3- أنشئ (C_f)

تمرين5

نعتبر f و g الدالتين العدديتين لمتغير حقيقي معرفتين بـ $f(x)=2x+1$ $\quad g(x)=\frac{3}{x}$

1- حدد D_f و D_g

2- أ- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $2x^2+x-3=0$

ب- حدد تقاطع (C_f) و (C_g)

3- أنشئ (C_f) و (C_g) في نفس المعلم.م.م $(O;\vec{i};\vec{j})$

4- حل مبيانيا المتراجحة $g(x)\geq 2x+1$

تمرين6

نعتبر f و g الدالتين العدديتين لمتغير حقيقي معرفتين بـ

$$f(x)=2x^2-3x+1 \qquad g(x)=2x-1$$

1- بين أن (C_f) شلجما محددا رأسه ثم أعط جدول تغيرات f

2- أ- حدد تقاطع (C_f) و محور الأفاصيل

ب- حدد تقاطع (C_f) و (C_g)

3- أنشئ (C_f) و (C_g) في نفس المعلم.م.م $(O;\vec{i};\vec{j})$

4- حل مبيانيا $f(x)-g(x)\succ 0$ $x\in\mathbb{R}$

تمرين7

نعتبر f و g الدالتين العدديتين لمتغير حقيقي معرفتين بـ

$$f(x)=x^2-2x-3 \qquad g(x)=\frac{x+1}{x-3}$$

1- أ- اعط جدول تغيرات f

ب- اعط جدول تغيرات g

2- أ- حدد تقاطع (C_f) و (C_g)

ب- أنشئ (C_f) و (C_g)

3- حل مبيانيا $f(x)\geq g(x)$ $x\in\mathbb{R}$

تمرين8

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي معرفة بـ $f(x)=\frac{2x-1}{-x+2}$

1- أ- حدد D_f

ب- تحقق أن لكل x من D_f $\quad f(x)=-2-\frac{3}{x-2}$

2- بين أن (C_f) صورة المنحنى (C) ذا المعادلة $y=\frac{-3}{x}$ بالإزاحة ذا المتجهة $\vec{u}(2;-2)$

3- نعتبر g دالة عددية لمتغير حقيقي معرفة بـ $g(x)=\frac{2|x|-1}{-|x|+2}$

أ- حدد D_g و بين أن g دالة زوجية

ب أنشئ (C_g) في المعلم.م.م $(O;\vec{i};\vec{j})$

تمرين9

نعتبر f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=ax^2+bx+1$

1- أوجد a و b إذا علمت أن (C_f) تمر من النقطتين $A(1;5)$ و $B(-1;1)$

2- نضع $a=b=2$

أ- أدرس رتابة f على $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$ و $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$

ب- أنشئ (C_f) في مستوى منسوب إلى م.م.م $(O;\vec{i};\vec{j})$

ج- حدد تقاطع (C_f) و المستقيم $(D):y=2x+3$

ح- حل مبيانيا $f(x)\geq 2x+3$ $x\in\mathbb{R}$

تمرين10

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي معرفة بـ $f(x)=x|x|-2x$

1- بين أن f دالة فردية

2- أ- بين لكل عنصرين مختلفين x و y من $[0;+\infty[$

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=x+y-2$$

ب- أدرس رتابة f على كل من $[1;+\infty[$ و $[0;1[$

ثم أعط جدول تغيرات f على $\mathbb{R}$

3- أنشئ (C_f)

4- حدد مبيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة $x|x|-2x-m=0$

تمرين11

نعتبر f و g الدالتين العدديتين لمتغير حقيقي معرفتين بـ

$$g(x)=\frac{x+2}{x-1} \qquad f(x)=\frac{x-1}{x+2}$$

لتكن $\Omega_1(-2;1)$ و $\Omega_2(1;1)$ نقطتين من مستوى منسوب إلى م.م.م $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- أدرس تغيرات f و g

2- أ- حدد تقاطع (C_f) و (C_g)

ب- أنشئ (C_f) و (C_g)

3- حل مبيانيا $f(x)\geq g(x)$

تمرين11

نعتبر f و g الدالتين العدديتين لمتغير حقيقي معرفتين بـ

$$g(x)=x^2-1 \qquad f(x)=\frac{2x}{x-1}$$

(C_f) و (C_g) منحنيا f و g في م.م.م $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- أ- حدد D_f

ب- تحقق أن لكل x من D_f $f(x)=2+\frac{2}{x-1}$

2- بين أن (C_f) صورة المنحنى (C) ذا المعادلة $y=\frac{2}{x}$ بالإزاحة ذا المتجهة $\vec{u}(1;2)$

3- أنشئ (C_f) و (C_g)

4- حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة $x^3-x^2-3x+1=0$

تمرين12

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي معرفة بـ $f(x)=-x^2+3|x|-2$

(C_f) منحنى f في م.م.م $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- بين أن f زوجية

2- أ- ليكن x و y من $\mathbb{R}^+$ حيث $x\neq y$. أحسب معدل تغير الدالة f بين x و y

ب- أدرس رتابة f على كل من $[0;3]$ و $[3;+\infty[$ و أعط جدول تغيرات f على $\mathbb{R}$

3- أنشئ (C_f)