ملخص درس دراسة الدوال

I. عموميات حول الدوال العددية:

1. دالة عددية لمتغير حقيقي:

تعريف: ليكن D جزءا من $\mathbb{R}$. نسمي f دالة عددية معرفة على D (أو f دالة من D نحو $\mathbb{R}$), كل علاقة تربط كل عنصر x من D بعنصر وحيد من $\mathbb{R}$, يرمز له بالرمز $f(x)$.

اصطلاحات: لتكن f دالة عددية معرفة على D نكتب: $f : D \to \mathbb{R}$
$x \to f(x)$

- المجموعة D تسمى مجموعة تعريف الدالة f.
- ليكن x عنصرا من D, بحيث: $y = f(x)$
  ← y يسمى صورة x بالدالة f.
  ← العنصر x يسمى سابق العنصر y.
- الدالة f تسمى كذلك دالة عددية لمتغير حقيقي.

2. مجموعة تعريف دوال عددية:

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x.
مجموعة تعريف الدالة f هي المجموعة المكونة من جميع الأعداد الحقيقية x بحيث $f(x)$ موجود أي $f(x)$ قابلة للحساب. و يرمز لها غالبا بالرمز D_f بمعنى: $x \in D_f$ تكافئ $f(x) \in \mathbb{R}$.

ملاحظة1: نقول إن f دالة عددية معرفة على A إذا كان A جزءا من D_f

ملاحظة2:(1) اذا كانت f دالة حدودية فان $D_f = \mathbb{R}$

(2) اذا كانت f دالة معرفة على الشكل: $f(x) = \sqrt{P(x)}$
فان $D_f = \{x \in \mathbb{R} / P(x) \geq 0\}$

(3) اذا كانت f دالة معرفة على الشكل : $f(x) = \dfrac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$
فان $D_f = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) > 0\}$

3. تساوي دالتين عدديتين:

تعريف: لتكن f و g دالتين عدديتين لهما نفس مجموعة تعريف D
تكون الدالتان f و g متساويتان إذا وفقط إذا كان $f(x) = g(x)$ لكل x من D. و نكتب: $f = g$

4. التمثيل المبياني لدالة عددية:

المستوى المنسوب إلى معلم $(o;\vec{i};\vec{j})$ غالبا يكون متعامدا ممنظما.

تعريف: لتكن f دالة عددية معرفة على جزء D من $\mathbb{R}$.
التمثيل المبياني C_f للدالة f (أو منحنى الدالة f) هو مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوى بحيث: $y = f(x)$ و $x \in D$

5. الدالة الزوجية- الدالة الفردية:

أ) الدالة الزوجية:

تعريف: لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x و D_f مجموعة تعريفها.
نقول إن f دالة زوجية إذا تحقق الشرطان التاليان:
- ❖ لكل x من D_f لدينا: $-x$ تنتمي إلى D_f.
- ❖ لكل x من D_f لدينا: $f(-x) = f(x)$

ب) الدالة الفردية: لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x و C_f منحناها في معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$.

تعريف: لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x و D_f مجموعة تعريفها ونقول أن f دالة فردية إذا تحقق الشرطان التاليان:
- ❖ لكل x من D_f لدينا: $-x$ تنتمي إلى D_f.
- ❖ لكل x من D_f لدينا: $f(-x) = -f(x)$

ت) التأويل المبياني

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x و C_f منحناها في معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$.
- ❖ تكون f دالة زوجية إذا و فقط إذا كان محور الأراتيب محور تماثل المنحنى C_f.
- ❖ تكون f دالة فردية إذا و فقط إذا كانت النقطة 0 مركز تماثل المنحنى C_f.

II. تغيرات دالة عددية:

1. تعريف: لتكن f دالة عددية معرفة على المجال I.
- ❖ نقول إن الدالة f تزايدية (تناقصية) على المجال I إذا و فقط إذا كان لكل
إذا كان $x_1 \prec x_2$ فان $f(x_1) \prec f(x_2)$ $\left(f(x_1) \succ f(x_2)\right)$
- ❖ نقول إن الدالة f ثابتة على المجال I, إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 من I لدينا: $f(x_1) = f(x_2)$

اعط مثال لدالة ثابتة

2. جدول تغيرات دالة: لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x و D_f مجموعة تعريفها. دراسة منحى تغيرات الدالة f, يعني تجزيء المجموعة D_f إلى أكبر مجالات ممكنة تكون فيها الدالة f تزايدية أو تناقصية قطعا أو ثابتة. و نلخص نتائج هده الدراسة في جدول, يسمى جدول تغيرات الدالة ثابتة.

3. رتابة دالة على مجال:

تعريف: لتكن دالة عددية معرفة على مجال I.
نقول إن f رتيبة قطعا على المجال I إذا كانت تزايدية قطعا على I أو تناقصية قطعا على I.

III. دراسة الدوال:

1. الدالة : $x \mapsto ax^2$ $(a \neq 0)$

ملخص الحالة: $a \succ 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↗

الحالة: $a \prec 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↗	0	↘

ملاحظات: المنحنى الممثل للدالة $x \mapsto ax^2$ $(a \neq 0)$ يسمى شلجما. النقطة أصل المعلم تسمى رأس الشلجم. محور الأراتيب هو محور تماثل للمنحنى.

2. الدالة: $f(x)=\frac{a}{x}$ $(a \neq 0)$

3) **ملخص: الحالة:** $a \succ 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	‖	↘

الحالة: $a \prec 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↗	‖	↗

التمثيل المبياني للدالة f: بما أن f دالة فردية فانه يكفي أن نمثل f على $]0,+\infty[$ ثم نتمم منحنى الدالة f على باستعمال التماثل المركزي الذي مركزه O أصل المعلم.

تعريف: منحنى الدالة $x \mapsto \frac{a}{x}$ $(a \neq 0)$ يسمى هذلولا مركزه O أصل المعلم و مستقيماه المقاربان هما $x=0$ و $y=0$.

IV. التمثيل المبياني و تغيرات الدالة: $x \mapsto ax^2+bx+c$

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$.

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=ax^2+bx+c$

حيث a و b و c أعداد حقيقية مع $a \neq 0$.

❖ يوجد عددان حقيقيان α و β بحيث: $f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta$ (الشكل القانوني)

❖ منحنى الدالة f يسمى شلجما رأسه $S(-\alpha;\beta)$ و محوره $(D): x=-\alpha$

نقبل النتائج التالية: جدول تغيرات f :

الحالة: $a \succ 0$

x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
f	↘	β	↗

الحالة: $a \prec 0$

x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
f	↗	β	↘

V. التمثيل المبياني و تغيرات الدالة: $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$

المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي: $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$

حيث $c \neq 0$ و a و b و c و d أعداد حقيقية و $ad-bc \neq 0$ و $x \neq \frac{d}{c}$

نقبل النتائج التالية: يوجد ثلاث أعداد : α و β و k بحيث : $f(x)=\beta+\frac{k}{x+\alpha}$ ويسمى الشكل المختصر

❖ جدول تغيرات f : **الحالة:** $k \succ 0$

x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
f	↘	‖	↘

الحالة: $k \prec 0$

x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
f	↗	‖	↗

❖ منحنى f يسمى هذلولا مركزه $S(-\alpha;\beta)$ و مقارباه $(D_1): x=-\alpha$ و $(D_2): y=\beta$.

VI. القيم القصوى و القيم الدنيا لدالة عددية على مجال:

تعاريف: لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I و a عنصرا من I

نقول إن $f(a)$ هي القيمة القصوى للدالة f على المجال I إذا و فقط إذا كان: $f(x) \le f(a)$ لكل x من I.

نقول إن $f(a)$ هي القيمة الدنيا للدالة f على المجال I إذا و فقط إذا كان: $f(x) \ge f(a)$ لكل x من I.

نقول كذلك الدالة f تقبل قيمة قصوى (أو دنيا) عند النقطة a على المجال I.

إذا كان $f(a)$ قيمة قصوى أو قيمة دنيا للدالة f نقول إن $f(a)$ مطراف للدالة f .