الدرس 5 : الترتيب والعمليات

I - مقارنة عددين جذريين :

1) قاعدة :

لمقارنة عددين جذريين، نحدد إشارة فرقهما:

* إذا كان $a-b \geq 0$ فإن : $a \geq b$
* إذا كان $a-b \leq 0$ فإن : $a \leq b$

2) أمثلة :

1) لنقارن العددين $\frac{2}{5}$ و 7

لدينا: $\frac{2}{5}-7=\frac{2-35}{5}=\frac{-33}{5}\leq 0$

إذن: $\frac{2}{5}-7\leq 0$ ومنه فإن: $\frac{2}{5}\leq 7$

2) لنقارن العددين $\frac{11}{3}$ و $\frac{7}{8}$

لدينا: $\frac{11}{3}-\frac{7}{8}=\frac{88-21}{24}=\frac{67}{24}>0$

إذن: $\frac{11}{3}-\frac{7}{8}>0$ ومنه فإن: $\frac{11}{3}>\frac{7}{8}$

3) a و b عددان جذريان بحيث: $a-b=-5$

لنقارن a و b

لدينا: $a-b=-5$

إذن: $a-b<0$ ومنه فإن: $a<b$

3) اصطلاحات :

أ- الترميز $<$

الترميز $a<b$ يعني أن $a\leq b$ و $a\neq b$

ويقرأ a أصغر قطعا من b

ب- الترميز $\leq$

الترميز $a\leq b$ يعني أن $a<b$ أو $a=b$

ويقرأ a أصغر من أو تساوي b

ج- المتفاوتة

a و b عددان جذريان.

كل كتابة على الشكل $a\leq b$ أو $a\geq b$ تسمى متفاوتة

a و b يسميان طرفي المتفاوتة.

II - الترتيب والعمليات :

1) الترتيب والجمع

أ- خاصية 1 :

a و b و k أعداد جذرية

إذا كان $a\leq b$ فإن: $a+k\leq b+k$

* مثال:

a و b عددان جذريان بحيث: $a-5\leq b$

لنبين أن $a-3\leq b+2$

لدينا: $a-5\leq b$ يعني أن $a-5+2\leq b+2$

أي أن: $a-3\leq b+2$

ب- خاصية 2 :

a و b و c و d أعداد جذرية

إذا كان $\left.\begin{array}{l} a\leq b \\ c\leq d \end{array}\right\}$ فإن: $a+c\leq b+d$

* مثال:

a و b عددان جذريان بحيث:

$a+3\leq -4$ و $2b-1\leq\frac{1}{2}$

لنبين أن: $2b+a+2\leq\frac{-7}{2}$

لدينا: $\left.\begin{array}{l} a+3\leq -4 \\ 2b-1\leq\frac{1}{2} \end{array}\right\}$ إذن $2b-1+a+3\leq\frac{1}{2}+(-4)$

ومنه فإن: $2b+a+2\leq\frac{1-8}{2}$

وبالتالي: $2b+a+2\leq\frac{-7}{2}$

2) الترتيب والضرب:

أ- خاصية 3 :

a و b و k أعداد جذرية

1/ إذا كان $\left.\begin{array}{l} a\leq b \\ k\geq 0 \end{array}\right\}$ فإن: $a\times k\leq b\times k$

2/ إذا كان $\left.\begin{array}{l} a\leq b \\ k\leq 0 \end{array}\right\}$ فإن: $a\times k\geq b\times k$

ب- مثال:

a و b عددان جذريان بحيث،

$a\leq\frac{1}{2}$ و $b\leq\frac{-3}{2}$

استنتج $2a$ و $-6b$

Rédigé par: Mr BENNASSER Jamal

* لدينا: $a \leq \frac{1}{2}$ و $2 > 0$ إذن: $a \times 2 \leq \frac{1}{2} \times 2$

أي أن: $2a \leq 1$

* لدينا: $b \leq -\frac{3}{2}$ و $-6 < 0$ إذن: $b \times (-6) \geq -\frac{3}{2} \times (-6)$

أي أن: $-6b \geq 9$

III- التأطير:

1) تعريف:

a و b و x أعداد جذرية

كل من الكتابتين $a < x < b$ و $a \leq x \leq b$

يسمى تأطيرا للعدد x

* ملاحظة:

* الكتابة $a \leq x \leq b$ تقرأ x محصور بين a و b
* الكتابة $a < x < b$ تقرأ: x محصور قطعا بين a و b

2) التأطير والتقريب:

* مثال: نعتبر العدد الجذري $\frac{13}{7}$

لدينا:

$$\begin{array}{r|l} 13 & 7 \\ 60 & 1,85 \\ 40 & \\ 5 & \end{array}$$

1) القيمة المقربة للعدد $\frac{13}{7}$ إلى $0,01$ بتفريط هي $1,85$

* القيمة المقربة للعدد $\frac{13}{7}$ إلى $0,01$ بإفراط هي $1,86$

إذن الكتابة $1,85 < \frac{13}{7} < 1,86$ تسمى تأطيرا للعدد $\frac{13}{7}$

2) القيمة المقربة للعدد $-\frac{13}{7}$ إلى $0,01$ بتفريط هي: $-1,86$

* القيمة المقربة للعدد $-\frac{13}{7}$ إلى $0,01$ بإفراط هي: $-1,85$

الكتابة $-1,86 < -\frac{13}{7} < -1,85$ تسمى تأطيرا للعدد $-\frac{13}{7}$

3) التأطير والعمليات:

أ- تأطير مجموع:

* خاصية 4: نعتبر جميع الأعداد جذرية

إذا كان $a \leq x \leq b$ و $c \leq y \leq d$ فإن: $a + c \leq x + y \leq b + d$

* مثال: x و y عددان جذريان بحيث $2 \leq x \leq 5$ و $-3 \leq y \leq -1$

لنؤطر $x + y$

لدينا: $2 \leq x \leq 5$ و $-3 \leq y \leq -1$ إذن: $2 + (-3) \leq x + y \leq 5 + (-1)$

وبالتالي فإن: $-1 \leq x + y \leq 4$

ب- تأطير فرق:

* خاصية 5: نعتبر جميع الأعداد جذرية

إذا كان $a \leq x \leq b$ و $c \leq y \leq d$ فإن: $a - d \leq x - y \leq b - c$

* ملاحظة هامة:

لدينا: $a - b = a + (-b)$

إذن لتأطير $a - b$ نؤطر أولا $-b$ ثم نطبق خاصية 4 (الجمع) مع:

⇐ إذا كان $a \leq x \leq b$ فإن: $-b \leq -x \leq -a$ تأطير المقابل

* مثال: x و y عددان جذريان بحيث $3 \leq x \leq 8$ و $-4 \leq y \leq 2$

لنؤطر $x - y$

لدينا: $-4 \leq y \leq 2$ إذن: $-2 \leq -y \leq 4$

لدينا: $3 \leq x \leq 8$ و $-2 \leq -y \leq 4$ إذن: $3 + (-2) \leq x + (-y) \leq 8 + 4$

وبالتالي فإن: $1 \leq x - y \leq 12$

ج- تأطير جداء:

* خاصية 6: نعتبر جميع الأعداد جذرية بحيث: $a \leq x \leq b$

* إذا كان $k > 0$ فإن: $ka \leq kx \leq kb$
* إذا كان $k < 0$ فإن: $kb \leq kx \leq ka$

* مثال: x عدد جذري بحيث: $-3 \leq x \leq 4$

لنؤطر $2x$ و $-5x$

لدينا: $-3 \leq x \leq 4$ و $2 > 0$

إذن: $2 \times (-3) \leq 2x \leq 2 \times 4$ أي أن: $-6 \leq 2x \leq 8$

ولدينا: $-3 \leq x \leq 4$ و $-5 < 0$

إذن: $-5 \times 4 \leq -5x \leq -5 \times (-3)$ أي: $-20 \leq -5x \leq 15$

4) تمرين تطبيقي:

a و b عددان جذريان بحيث:

$1 \leq a \leq \frac{5}{2}$ و $-4 \leq b \leq -\frac{3}{2}$

أطر $a+b$ و $a-b$ و $-4a$ و $8b$ و $3a+2$ و $-2b-\frac{3}{4}$

* تأطير $a+b$

لدينا: $1 \leq a \leq \frac{5}{2}$ و $-4 \leq b \leq -\frac{3}{2}$ إذن $1+(-4) \leq a+b \leq \frac{5}{2}+(-\frac{3}{2})$

أي أن: $-3 \leq a+b \leq 1$

* تأطير $a-b$

لدينا: $-4 \leq b \leq -\frac{3}{2}$ إذن: $\frac{3}{2} \leq -b \leq 4$

ولدينا: $1 \leq a \leq \frac{5}{2}$

إذن: $1+\frac{3}{2} \leq a+(-b) \leq \frac{5}{2}+4$

وبالتالي فإن: $\frac{5}{2} \leq a-b \leq \frac{13}{2}$

* تأطير $-4a$

لدينا: $1 \leq a \leq \frac{5}{2}$ إذن $-4\times\frac{5}{2} \leq -4\times a \leq -4\times 1$

أي أن: $-10 \leq -4a \leq -4$

* تأطير $8b$

لدينا: $-4 \leq b \leq -\frac{3}{2}$ إذن: $8\times(-4) \leq 8b \leq 8\times(-\frac{3}{2})$

أي أن: $-32 \leq 8b \leq -12$

* تأطير $3a+2$

لدينا: $1 \leq a \leq \frac{5}{2}$ إذن $3\times 1 \leq 3\times a \leq 3\times\frac{5}{2}$

$3 \leq 3a \leq \frac{15}{2}$

$3+2 \leq 3a+2 \leq \frac{15}{2}+2$

وبالتالي: $5 \leq 3a+2 \leq \frac{19}{2}$

* تأطير $-2b-\frac{3}{4}$

لدينا: $-4 \leq b \leq -\frac{3}{2}$ إذن $-2\times(-\frac{3}{2}) \leq -2\times b \leq -2\times(-4)$

$3 \leq -2b \leq 8$

$3-\frac{3}{4} \leq -2b-\frac{3}{4} \leq 8-\frac{3}{4}$

$\frac{12-3}{4} \leq -2b-\frac{3}{4} \leq \frac{32-3}{4}$

ومنه فإن: $\frac{9}{4} \leq -2b-\frac{3}{4} \leq \frac{29}{4}$

IV - المتراجحات:

1) تعريف:

تسمى متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد كل كتابة على الشكل:

$ax+b \geq c$ أو $ax+b \leq c$

$ax+b > c$ أو $ax+b < c$

2) حل المتراجحات:

أ- تقنيات الحل:

* نعتمد حل متراجحة على نفس تقنيات حل المعادلات مثل:

- تجميع المجاهيل في طرف والمعاليم في طرف
- تغيير إشارة كل حد نقلناه من طرف إلى الطرف الآخر من المتراجحة.

* يجب الانتباه لإشارة العدد a في المتراجحة $ax \leq b$ بحيث:

$a>0$: فإن: $x \leq \frac{b}{a}$ لا نغير الرمز

$a<0$: فإن: $x \geq \frac{b}{a}$ نغير الرمز

ب- حالات الحل:

1) إذا وجدنا مثلا $x<a$ ($x \leq a$) نقول أن جميع الأعداد الجذرية الأكبر قطعا (الأصغر أو تساوي a) هي حلول لهذه المتراجحة

2) إذا وجدنا مثلا $0 \geq 3$ ($0>3$) نقول أن هذه المتراجحة ليس لها حل.

3) إذا وجدنا مثلا $0 \geq -8$ (هذا دائما صحيح) نقول أن جميع الأعداد الجذرية هي حلول لهذه المتراجحة.

ج- أمثلة:

1) المتراجحة $2x+1 \leq 5$ تكافئ على التوالي

$2x \leq 5-1$

$2x \leq 4$

$x \leq \frac{4}{2}$

$x \leq 2$

إذن جميع الأعداد الجذرية الأصغر أو تساوي 2 هي حلول لهذه المتراجحة.

2) المتراجحة $2(3x-5)-3(x+1) \geqslant 0$
تكافئ على التوالي

$$6x-10-3x-3 \geqslant 0$$
$$3x-13 \geqslant 0$$
$$3x \geqslant 13$$
$$x \geqslant \frac{13}{3}$$

إذن جميع الأعداد الجذرية الأكبر أو تساوي $\frac{13}{3}$
هي حلول لهذه المتراجحة.

3) المتراجحة $\frac{x+1}{2}-\frac{x-3}{3} > \frac{3x+5}{6}$
تكافئ على التوالي

$$\frac{3(x+1)-2(x-3)}{6} > \frac{3x+5}{6}$$
$$3x+3-2x+6 > 3x+5$$
$$x-3x > 5-9$$
$$-2x > -4$$
$$x < \frac{-4}{-2}$$
$$x < 2$$

إذن جميع الأعداد الجذرية الأصغر قطعا من 2
هي حلول لهذه المتراجحة

4) المتراجحة $2(3x-1)-4x \geqslant 2x+1$
تكافئ على التوالي

$$6x-2-4x \geqslant 2x+1$$
$$2x-2x \geqslant 1+2$$
$$0x \geqslant 3$$

وهذا غير ممكن إذن هذه المتراجحة ليس لها حل.

5) المتراجحة $3x+5-2(x+2) > x-7$
تكافئ على التوالي

$$3x+5-2x-4 > x-7$$
$$x-x > -7-1$$
$$0x > -8$$

إذن جميع الأعداد الجذرية حلول لهذه المتراجحة